Correction de l'examen de décembre 2001

Exercice 1 : Intégrales de Lebesgue et Transformée de Fourier.
1. l'application $t \mapsto \widehat{f}(t)$ étant continue sur R, l'application $t \mapsto \frac{\widehat{f}(t)}{t}$ est continue sur le compact $[1/n; n]$, donc est intégrable.
2. On a :

$$\widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi tx}dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\cos(2\pi tx)dx - i\int_{\mathbb{R}} f(x)\sin(2\pi tx)dx$$

f étant impaire, on a $x \mapsto f(x)\cos(2\pi tx)$ impaire, et $x \mapsto f(x)\sin(2\pi tx)$ paire. D'où $\int_{\mathbb{R}} f(x)\cos(2\pi tx)dx = 0$, et $\int_{\mathbb{R}} f(x)\sin(2\pi tx)dx = 2\int_{\mathbb{R}^+} f(x)\sin(2\pi tx)dx$, cqfd.
3.D'après 2., on a :

$$\int_{1/n}^{n} \frac{\widehat{f}(t)}{t}dt = -2i\int_{1/n}^{n}\int_{0}^{+\infty} \frac{f(x)\sin(2\pi tx)}{t}dxdt$$

Soit $g(t,x) = \frac{f(x)\sin(2\pi tx)}{t}$. Alors :

$$\int_{1/n}^{n}\int_{0}^{+\infty} |g(t,x)|\,dxdt \leq \int_{1/n}^{n}\int_{0}^{+\infty} \frac{|f(x)|}{t}dxdt = \left(\int_{0}^{+\infty} |f(x)|\,dx\right)\left([\ln(t)]_{1/n}^{n}\right) < +\infty$$

Donc g est intégrable sur $[1/n; n] \times \mathbb{R}^+$, et d'après Fubini, on peut inverser les intégrales :

$$\begin{aligned}\int_{1/n}^{n} \frac{\widehat{f}(t)}{t}dt &= -2i\int_{0}^{+\infty}\int_{1/n}^{n} \frac{f(x)\sin(2\pi tx)}{t}dtdx \\ &= -2i\int_{0}^{+\infty} f(x)\phi_n(x)dx\end{aligned}$$

où $\phi_n(x) = \int_{1/n}^{n} \frac{\sin(2\pi tx)}{t}dt = \int_{x/n}^{nx} \frac{\sin(2\pi u)}{u}du$ (par changement de variable $u = tx$).
4. Soit $f_n(x) = f(x)\phi_n(x)$. On a pour tout $x \geq 0$: $\lim_{n\to+\infty} \phi_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2\pi u)}{u}du = \frac{\pi}{2}$. Ainsi :
- $|f_n(x)| \leq M\,|f(x)|$, ce qui montre que $f_n(x)$ est intégrable ;
- $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2}f(x)$;
- $|f_n(x)|$ est majorée par une fonction intégrable indépendante de n.

Ainsi, d'après le théorème de la convergence dominée, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{0}^{+\infty} f_n(x)dx = \int_{0}^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \int_{0}^{+\infty} f(x)\frac{\pi}{2}dx.$$

D'où le résultat.
5. $\widehat{g}$ est impaire, donc $\widehat{g}(-t) = -\widehat{g}(t)$, c'est-à-dire :

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)e^{2i\pi tx}dx = -\int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-2i\pi tx}dx$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}} g(-x)e^{-2i\pi tx}dx = -\int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-2i\pi tx}dx$$

Ainsi $g(-x) = -g(x)$ p.p. x. Soit alors h la fonction telle que

$$\begin{aligned}h(x) &= g(x) \text{ pour tout } x \text{ telle que } g(-x) = -g(x) \\ h(x) &= 0 \quad \text{sinon}\end{aligned}$$

Ainsi, $h(x) = -h(-x)$ pour tout x. h est donc impaire, et $h = g$ p.p.
6. (**attention** : erreur dans l'énoncé ; il faut lire : $g(t) = -g(-t)$ pour $t < 0$). Si g était dans $L^1(\mathbb{R})$, il existerait $w \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $g(t) = \widehat{w}(t)$. D'après 5., il existerait donc h impaire telle que $h = w$ p.p. D'après 4., on aurait donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{1/n}^{n} \frac{\widehat{h}(t)}{t} dt = -i\pi \int_0^{+\infty} h(x)dx < +\infty$$

car $h \in L^1(\mathbb{R})$. Or,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{1/n}^{n} \frac{\widehat{h}(t)}{t} dt = \lim_{n\to+\infty} \int_{1/n}^{n} \frac{dt}{t(1+|\ln t|)} = +\infty.$$

D'où la contradiction.

Exercice 2 : Distributions
1. fait en cours
2. On a :

$$\langle T_{u_n}, \phi\rangle = -\int_{\mathbb{R}} \sin(nt) 1_{[-\frac{\pi}{2n};\frac{\pi}{2n}]}(t)dt$$

Soit $g_n(t) = \sin(nt)1_{[-\frac{\pi}{2n};\frac{\pi}{2n}]}(t)$. Alors $g_n(t) \to 0$ quand $n \to +\infty$, et $|g_n(t)| \le |\phi(t)|$ intégrable. Donc d'après le théorème de la convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty} \langle T_{u_n}, \phi\rangle = -\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} g_n(t)dt) = 0$$

c-à-d $T_{u_n} \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0$.
3. On a : $v_n(t) = u'_n(t)$ p.p. t. D'autre part, la fonction $u_n(t)$ présente 2 discontinuités d'amplitude 1 en $+\frac{\pi}{2n}$ et en $-\frac{\pi}{2n}$. On a donc (cf cours)

$$T'_{u_n} = T_{u'_n} + \delta_{-\frac{\pi}{2n}} + \delta_{+\frac{\pi}{2n}}.$$

Et $T_{u_n} \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0$ implique $T'_{u_n} \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0$. D'où

$$\lim_{n\to+\infty} T_{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(-\delta_{-\frac{\pi}{2n}} - \delta_{+\frac{\pi}{2n}}\right) = -2\delta$$

d'après 1.
4. On a : $f_n(t) = v'_n(t)$ p.p. t. La fonction $v_n(t)$ étant continue, on a : $T'_{v_n} = T_{v'_n} = T_{f_n}$. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} T_{f_n} = -2\delta'$$

5. Par calcul direct :

$$\begin{aligned}
\langle T_{f_n}, \phi\rangle &= n^2 \int_{-\pi/2n}^{+\pi/2n} \sin(nt)\phi(t)dt \\
&= n^2 \left(\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\phi(t) \right]_{-\pi/2n}^{+\pi/2n} + \frac{1}{n} \int_{-\pi/2n}^{+\pi/2n} \cos(nt)\phi'(t)dt \right) \\
&= n \int_{-\pi/2n}^{+\pi/2n} \cos(nt)\phi'(t)dt \\
&= n \left(\left[\frac{\sin(nt)}{n}\phi'(t) \right]_{-\pi/2n}^{+\pi/2n} - \frac{1}{n} \int_{-\pi/2n}^{+\pi/2n} \sin(nt)\phi''(t)dt \right) \\
&= \phi'\left(\frac{\pi}{2n}\right) + \phi'\left(-\frac{\pi}{2n}\right) - \int_{-\pi/2n}^{+\pi/2n} \sin(nt)\phi''(t)dt
\end{aligned}$$

Et $\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi/2n}^{+\pi/2n}\sin(nt)\phi''(t)dt = 0$ d'après le théorème de la convergence dominée. D'où :

$$\lim_{n\to+\infty}\langle T_{f_n},\phi\rangle = \phi'(0)+\phi'(0) = 2\left\langle \delta,\phi'\right\rangle = -2\left\langle \delta',\phi\right\rangle.$$

On retrouve donc bien que $\lim_{n\to+\infty} T_{f_n} = -2\delta'$.