Correction de l'examen de décembre 2001

Exercice 1 : Intégrales de Lebesgue et série.
1a.D'après $-1 \leq \cos t \leq 1$, on a

$$(1-x)^2 \leq 1 + 2x\cos t + x^2 \leq (1+x)^2$$

En prenant le logarithme et en divisant par x, on a donc

$$2\frac{\ln(1-x)}{x} \leq f(t,x) \leq 2\frac{\ln(1+x)}{x}$$

Et donc

$$|f(t,x)| \leq \max\left(-2\frac{\ln(1-x)}{x}, 2\frac{\ln(1+x)}{x}\right)$$

Enfin, on a $\max\left(-2\frac{\ln(1-x)}{x}, 2\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = -2\frac{\ln(1-x)}{x}$, d'où le résultat.
1b. l'application $x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{x}$ étant négative sur $]0,1[$, on a

$$\int_{]0;1[} \left|\frac{\ln(1-x)}{x}\right| dx = -\int_{]0;1[} \frac{\ln(1-x)}{x} dx$$

Or, $x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{x}$ est continue sur $]0,1[$, et $\frac{\ln(1-x)}{x} \underset{0^+}{\sim} -1$, et $\frac{\ln(1-x)}{x} \underset{1^-}{\sim} \ln(1-x)$. Ainsi, $\int_{]0;1[} \frac{\ln(1-x)}{x} dx$ est finie, et donc l'application $x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{x}$ est intégrable sur $]0,1[$.
Ainsi, d'après 1a., pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|f(t,x)|$ est majorée par une fonction intégrable. Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application $x \mapsto f(t,x)$ est également intégrable sur $]0,1[$, et l'application $t \mapsto F(t) = \int_{[0,1]} f(t,x)dx$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. F est clairement paire et 2π-périodique. D'autre part, pour tout $x \in]0,1[$, l'application $t \mapsto f(t,x)$ est continue, et $f(t,x)$ est majorée pour tout t par la fonction $-2\frac{\ln(1-x)}{x}$ intégrable sur $]0;1[$. Ainsi, F est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Pour tout $t \in]0;\pi[$ et $x \in]0,1[$, on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| = \left|\frac{-2\sin t}{1+2x\cos t + x^2}\right| \leq \frac{2}{1+2x\cos t + x^2}$$

Soit t^* fixé dans $]0;\pi[$. Il existe donc α tel que $t^* < \alpha < \pi$. On considère donc le voisinage $V_{t^*} =]0;\alpha[$ de t^*. Pour tout $t \in V_{t^*}$, on a $\cos t > \cos\alpha > -1$, et donc

$$\frac{2}{1+2x\cos t + x^2} \leq \frac{2}{1+2x\cos\alpha + x^2}$$

De plus, $1 + 2x\cos\alpha + x^2 > 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$. Donc $1 + 2x\cos\alpha + x^2$ est une fonction continue qui ne s'annule pas sur $]0,1[$. Donc la fonction $x \mapsto \frac{2}{1+2x\cos\alpha+x^2}$ est continue et donc intégrable sur $]0,1[$. Ainsi, on a majoré sur le voisinage V_{t^*} la fonction $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right|$ par une fonction qui ne dépend que de x, intégrable sur $]0;1[$. Donc F est dérivable en t^*, et ceci est vrai pour tout $t^* \in]0;\pi[$. Donc F est dérivable sur $]0;\pi[$, et

$$F'(t) = -2\sin t \int_{[0,1]} \frac{dx}{1+2x\cos t + x^2}$$

4. Pour tout $t \in]0;\pi[$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]} \frac{dx}{1+2x\cos t + x^2} &= \int_{[0,1]} \frac{dx}{(x+\cos t)^2+\sin^2 t} = \frac{1}{\sin^2 t}\int_{[0,1]} \frac{dx}{\left(\frac{x+\cos t}{\sin t}\right)^2+1} \\
&= \frac{1}{\sin t}\left[\arctan\left(\frac{x+\cos t}{\sin t}\right)\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{1}{\sin t}\left(\arctan(\mathrm{cotan}\,(t/2)) - (\arctan(\mathrm{cotan}\,(t))\right) \\
&= \frac{t}{2\sin t}
\end{aligned}$$

Ainsi, $F'(t) = -t$ et donc $F(t) = -t^2/2 + K$ pour tout $t \in]0;\pi[$. Or F est continue ; donc $F(0) = \lim_{t\to 0} F(t) = K$. D'où

$$F(t) = F(0) - \frac{t^2}{2}$$

5. On a :

$$\begin{aligned}
F\left(\frac{t}{2}\right) + F\left(\pi - \frac{t}{2}\right) &= \int_{[0,1]} \frac{1}{x}\left(\ln\left(1+2x\cos\frac{t}{2}+x^2\right) + \ln\left(1-2x\cos\frac{t}{2}+x^2\right)\right)dx \\
&= \int_{[0,1]} \frac{1}{x}\ln\left(1+2x^2\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)+x^4\right)dx
\end{aligned}$$

En posant $u = x^2$, on obtient :

$$\begin{aligned}
F\left(\frac{t}{2}\right) + F\left(\pi - \frac{t}{2}\right) &= \int_{[0,1]} \frac{1}{2u}\ln\left(1-2u\cos t+u^2\right)du \\
&= \frac{1}{2}\int_{[0,1]} \frac{1}{u}\ln\left(1+2u\cos(\pi-t)+u^2\right)du \\
&= \frac{1}{2}F(\pi - t)
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $t = 0$, on a : $F(0) + F(\pi) = \frac{1}{2}F(\pi)$, c'est-à-dire $F(\pi) = -2F(0)$. Or, d'après 4., on a aussi $F(\pi) = F(0) - \frac{\pi^2}{2}$. On en déduit que

$$F(0) = \frac{\pi^2}{6}, \text{ et } F(\pi) = -\frac{\pi^2}{3}$$

6. On a

$$F(\pi) = 2\int_{]0;1[} \frac{\ln(1-x)}{x}dx = -2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$$

et $F(\pi) = -\frac{\pi^2}{3}$. Ainsi,

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 2 : Distributions.

1. $f_n(t)$ est une fonction continue, donc localement intégrable. Elle définit donc une distribution régulière T_{f_n} telle que

$$\langle T_{f_n}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f_n(t)\varphi(t)dt$$

2. Soit $\varphi \in \mathcal{D}$ de support inclus dans $[-a;a]$. On a alors :

$$\begin{aligned} \langle T_{f_n}, \varphi \rangle &= \int_{-a}^{+a} f_n(t)\varphi(t)dt = \int_{-a}^{+a} \frac{\sin(2\pi nt)}{n}\varphi(t)dt \\ &= \frac{-1}{2\pi n^2}\left([\varphi(t)\cos(2\pi nt)]_{-a}^{+a} - \int_{-a}^{+a} \cos(2\pi nt)\,\varphi'(t)dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi n^2}\int_{-a}^{+a} \cos(2\pi nt)\,\varphi'(t)dt \end{aligned}$$

(car $\varphi(a) = \varphi(-a) = 0$). De plus, φ' est continue, donc bornée sur $[-a;a]$. Il existe donc $M > 0$ tel que

$$\forall t \in [-a;+a]\,, \quad |\cos(2\pi nt)\,\varphi'(t)| \leq M$$

Ainsi,

$$|\langle T_{f_n}, \varphi \rangle| = \left| \frac{1}{2\pi n^2}\int_{-a}^{+a} \cos(2\pi nt)\,\varphi'(t)dt \right| \leq \frac{2aM}{2\pi n^2}$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\langle T_{f_n}, \varphi \rangle| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{K}{n^2} < +\infty$$

Ainsi, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \langle T_{f_n}, \varphi \rangle$ est convergente, ce qui prouve que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} T_{f_n}$ converge dans $\mathcal{D}'$.
2. On a donc (cf cours) :

$$T' = \sum_{n=1}^{+\infty} T'_{f_n}$$

Or, f_n étant continue, on a $T'_{f_n} = T_{f'_n}$, où $T_{f'_n}$ est la distribution régulière associée à $f'_n(t) = 2\pi\cos(2\pi nt)$. Cette série converge dans $\mathcal{D}'$, mais la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2\pi\cos(2\pi nt)$ ne converge pas au sens des fonctions (car le terme général ne tend même pas vers 0 quand $n \to +\infty$).
3. De même

$$T'' = \sum_{n=1}^{+\infty} T''_{f_n}$$

où $T''_{f_n} = T'_{f'_n} = T_{f''_n}$ (car f' est continue) est la distribution régulière associée à $f''_n(t) = -4\pi^2 n\sin(2\pi nt)$. Cette série converge dans $\mathcal{D}'$, mais la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} -4\pi^2 n\sin(2\pi nt)$ ne converge pas au sens des fonctions (le terme général tend même vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$).