Correction de l'examen de

Mesure-Intégration, Analyse de Fourier, Distributions,

Questions préliminaires :

1. Pour $\varepsilon = 1$, soit $x_k(t) = \frac{t^k}{k!}e^{-at}u(t)$. On a $x_k \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, donc les TF de x_k dans $L^1(\mathbb{R})$ et dans $L^2(\mathbb{R})$ coïncident. Ainsi,

$$\begin{aligned} X_k(f) &= \int_{\mathbb{R}} x_k(t)e^{-2j\pi ft}dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^k}{k!}e^{-(a+2i\pi f)t}dt \\ &= \frac{1}{k!}\left(\left[t^k \frac{e^{-(a+2i\pi f)t}}{-(a+2j\pi f)}\right]_0^{+\infty} + \frac{k}{a+2j\pi f}\int_0^{+\infty} t^{k-1}e^{-(a+2i\pi f)t}dt\right) \\ &= \frac{k(k-1)!}{k!\,(a+2j\pi f)}\int_0^{+\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{-(a+2j\pi f)t}dt = \frac{1}{a+2j\pi f}X_{k-1}(f) \end{aligned}$$

Par récurrence, on a donc $X_k(f) = \frac{1}{(a+2j\pi f)^k}X_0(f)$, et $X_0(f) = \frac{1}{a+2j\pi f}$. D'où

$$X_k(f) = \frac{1}{(a+2i\pi f)^{k+1}}$$

Pour $\varepsilon = -1$, on peut refaire le calcul, ou bien voir que $\widetilde{x}_k(t) = \frac{t^k}{k!}e^{at}u(-t) = (-1)^k x_k(-t)$, et donc

$$\widetilde{X}_k(f) = (-1)^k X_k(-f) = \frac{1}{(-a+2j\pi f)^{k+1}}$$

2. Pour tout $k \geq 0$, les fonctions $\frac{1}{(\pm a+2j\pi f)^{k+1}}$ sont dans $L^2(\mathbb{R})$, et on vient de voir que ce sont les transformées de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ (et dans $L^1(\mathbb{R})$) de fonctions $x_k(t)$ et $\widetilde{x}_k(t)$. Ainsi $TF^{-1}\left(\frac{1}{(\varepsilon a+2j\pi f)^{k+1}}\right) = \frac{t^k}{k!}e^{-\varepsilon at}u(\varepsilon t)$ (dans $L^2(\mathbb{R})$).

Exercice 1 : Filtres analogiques.

1. Les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ étant dans $S(\mathbb{R})$, leurs dérivées le sont aussi, et $x^{(l)}$ et $y^{(k)}$ sont donc aussi dans $L^1(\mathbb{R})$. On peut donc leur appliquer les formules de TF de la dérivée (cf. cours), et on a: $\widehat{x^{(l)}}(f) = (2j\pi f)^l X(f)$, et $\widehat{y^{(k)}}(f) = (2j\pi f)^k Y(f)$. En prenant la TF de l'équation

$$\sum_{k=0}^{p} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{l=0}^{q} b_l x^{(l)}(t), \tag{1}$$

on obtient donc

$$\sum_{k=0}^{p} a_k\,(2j\pi f)^k\,Y(f) = \sum_{l=0}^{q} b_l\,(2j\pi f)^l\,X(f),$$

c-à-d : $P\,(2j\pi f)\,Y(f) = Q\,(2j\pi f)\,X(f)$. Comme le polynôme P n'a pas de racine imaginaire pure, on a $P\,(2j\pi f) \neq 0\ \forall f$. Ainsi,

$$Y(f) = H(f)X(f) \text{ avec } H(f) = \frac{Q(2i\pi f)}{P\,(2i\pi f)}.$$

2. On a $x \in S(\mathbb{R})$, donc $X \in S(\mathbb{R})$ (stabilité de $S(\mathbb{R})$ par TF). Donc X est C^∞, et les dérivées de X sont à décroissance rapide. D'autre part, H est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. Donc H est C^∞, et HX aussi, et on a pour tout n entier

$$(HX)^{(n)}(f) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k H^{(k)}(f) X^{(n-k)}(f)$$

(**remarque** : même si on ne connaît pas exactement la formule, il est suffisant de dire que $(HX)^{(n)}$ s'écrit en terme de produits entre $H^{(k)}$ et de $X^{(l)}$). Or, $H^{(k)}$ est une fraction rationnelle, donc est C^∞, et ne croît pas plus vite qu'un polynôme. Ainsi, comme $X^{(n-k)}$ est à décroissance rapide, $H^{(k)}X^{(n-k)}$ est aussi à décroissance rapide, et $(HX)^{(n)}$ également. Finalement, HX est C^∞, et ses dérivées sont à décroissance rapide, ç-à-d $Y = HX \in S(\mathbb{R})$.

De plus, la TF étant bijective de $S(\mathbb{R})$ dans $S(\mathbb{R})$, il existe une unique fonction $y \in S(\mathbb{R})$ telle que $TF(y) = Y$. Cette fonction y est donc l'unique solution de l'équation (1).

remarque : on a trouvé une solution unique à une équation différentielle sans donner de conditions aux limites (ou conditions initiales/finales). En fait, ces conditions sont implicitement imposées par le fait que l'on cherche y dans $S(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que l'on impose des dérivées nulles à l'infini.

3. **linéarité** : si $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, on a $Y = HX = H(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) = \lambda_1 HX_1 + \lambda_2 HX_2 = \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2$. D'où $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$.

invariance : soit $x_a(t) = x(t-a)$ et $X_a = TF(x_a)$. On a : $Y_a(f) = H(f)X_a(f) = H(f)X(f)e^{-2j\pi af}$ (formule du retard) $= Y(f)e^{-2j\pi af}$. D'où $y_a(t) = y(t-a)$.

continuité : soit $(x_n)_n$ suite de $S(\mathbb{R})$ telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})}{\longrightarrow}} 0$. Alors $X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})}{\longrightarrow}} 0$. Donc $HX_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})}{\longrightarrow}} 0$, c'est-à-dire $Y_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})}{\longrightarrow}} 0$. D'où $y_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})}{\longrightarrow}} 0$.

4. Si $q < p$, H est une fraction rationnelle dont le dénominateur est de plus haut degré ; ainsi $H(f) \underset{f\to\pm\infty}{\sim} \frac{1}{f^k}$ avec $k \geq 1$, et donc $H^2(f) \underset{f\to\pm\infty}{\sim} \frac{1}{f^l}$ avec $l = 2k \geq 2$. H est de carré intégrable, c-à-d $H \in L^2(\mathbb{R})$. Il existe donc $h \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $H = TF(h)$ (dans $L^2(\mathbb{R})$). On a donc $Y = HX = TF(h) \times TF(x) = TF(h * x)$ (formule TF/convolution dans $L^2(\mathbb{R})$). Par TF inverse, on a donc $y = h * x$.

5. Si $p \leq q$, on a $H \notin L^2(\mathbb{R})$. H n'est donc pas la TF d'une fonction de $L^2(\mathbb{R})$, et donc de $S(\mathbb{R})$, et on n'a plus $Y = TF(h) \times TF(x) = TF(h * x)$. On ne peut donc plus écrire $y = h * x$.

remarque : par contre, on a toujours $Y = HX \in S(\mathbb{R})$, et $y = TF^{-1}(Y)$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

6. On a

$$H(f) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\alpha_k}{2i\pi f - z_k}$$

et donc, en prenant la TF inverse dans $L^2(\mathbb{R})$,

$$h(t) = \sum_{k\in K^+} \alpha_k TF^{-1}\left(\frac{1}{2i\pi f - z_k}\right)(t) + \sum_{k\in K^-} \alpha_k TF^{-1}\left(\frac{1}{2i\pi f + (-z_k)}\right)(t) .$$

On applique alors les résultats de la question préliminaire avec $a = z_k$ et $\varepsilon = -1$ pour $k \in K^+$, et $a = -z_k$ et $\varepsilon = 1$ pour $k \in K^-$. D'où :

$$h(t) = \sum_{k\in K^+} \alpha_k(-e^{z_k t})u(-t) + \sum_{k\in K^-} \alpha_k e^{z_k t}u(t) = \left(\sum_{k\in K^-} \alpha_k e^{z_k t}\right) u(t) - \left(\sum_{k\in K^+} \alpha_k e^{z_k t}\right) u(-t).$$

7. On a $Q(u) = 1$ et $P(u) = LRu^2 + RCu + 1$, et alors

$$H(f) = \frac{1}{1 + 2j\pi RCf - 4\pi^2 LRf^2}$$

Donc

$$|H(f)| = \frac{1}{\left(\left(1 - 4\pi^2 LRf^2\right)^2 + 4\pi^2 R^2 C^2 f^2\right)^{1/2}}.$$

Ainsi, $|H(0)| = 1$ et $|H(f)| \to 0$ quand $f \to \pm\infty$. $H(f)$ est donc un filtre passe-bas.

8. Pour $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, l'équation $P(u) = 0$ admet 2 racines simples réelles

$$z_1 = \frac{-RC + \sqrt{\Delta}}{2LC} < 0 \text{ et } z_2 = \frac{-RC - \sqrt{\Delta}}{2LC} < 0$$

avec $\Delta = R^2C^2 - 4LC$. On a donc $K^- = \{1, 2\}$ et $K^+ = \emptyset$. De plus, on a

$$\begin{aligned} H(f) &= \frac{Q(2i\pi f)}{P(2i\pi f)} = \frac{1}{LC} \frac{1}{(2j\pi f - z_1)(2j\pi f - z_2)} \\ &= \frac{1}{LC}\left(\frac{\alpha}{(2j\pi f - z_1)} + \frac{\beta}{(2j\pi f - z_2)}\right) \end{aligned}$$

avec $\alpha = -\beta = \frac{1}{z_1 - z_2}$. D'où :

$$h(t) = \frac{\alpha}{LC}\left(e^{z_1 t} - e^{z_2 t}\right) u(t)$$

Exercice 2 : Filtres analogiques et distributions.

1. Soit $\phi \in S(\mathbb{R})$. On a

$$\left\langle \widehat{\delta^{(k)}}, \phi \right\rangle = \left\langle \delta^{(k)}, \widehat{\phi} \right\rangle = (-1)^k \left\langle \delta, \widehat{\phi}^{(k)} \right\rangle = (-1)^k \widehat{\phi}^{(k)}(0)$$

ϕ étant dans $S(\mathbb{R})$, $t^k\phi(t)$ est aussi dans $S(\mathbb{R})$, donc dans $L^1(\mathbb{R})$, et on a $\widehat{\phi}^{(k)}(f) = TF\left((-2j\pi t)^k \phi(t)\right)(f)$. D'où

$$\widehat{\phi}^{(k)}(0) = \int_{\mathbb{R}} (-2j\pi t)^k \phi(t)dt = \left\langle (-2j\pi t)^k, \phi \right\rangle.$$

Ainsi,

$$\widehat{\delta^{(k)}} = (2j\pi t)^k$$

(il faut comprendre le terme de droite comme la distribution régulière associée à la fonction $(-2j\pi t)^k$).

2. On a

$$H(f) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\alpha_k}{2i\pi f - z_k} + \sum_{k=0}^{q-p} \lambda_k (2i\pi f)^k$$

D'après ce qui précède, $(2i\pi f)^k$ est la TF dans $S'(\mathbb{R})$ de $\delta^{(k)}$. En utilisant en plus les résultats des questions préliminaires, on a donc

$$h = \left(\sum_{k\in K^-} \alpha_k e^{z_k t}\right) u(t) - \left(\sum_{k\in K^+} \alpha_k e^{z_k t}\right) u(-t) + \sum_{k=0}^{q-p} \lambda_k \delta^{(k)}.$$

(là aussi, il faut comprendre les 2 fonctions du terme de droite comme les distributions régulières associées à ces fonctions).

3. On a

$$H(f) = \frac{(2j\pi f)^2 + 2j\pi f + 1}{2j\pi f + a} = \lambda_0 + \lambda_1 2i\pi f + \frac{\alpha_1}{2i\pi f - z_1}$$

avec $\lambda_0 = 1 - a$, $\lambda_1 = 1$, $z_1 = -a$, et $\alpha_1 = 1 - a + a^2$. D'après la question 2, on a alors

$$h = \lambda_0 \delta + \lambda_1 \delta' + \alpha_1 e^{-at} u(t)$$