Correction de l'examen de Analyse de Fourier I
vendredi 17 décembre 2004.

1 Corrélations et spectres de signaux à énergie finie

1. En posant $\widetilde{y}(t) = y^*(-t)$,on a bien $K_{x,y}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\widetilde{y}(\tau - t)dt$. Donc $K_{x,y}(\tau) = x * \widetilde{y}(\tau)$.

2. y étant dans $L^2(\mathbb{R})$, $\widetilde{y}$ l'est aussi. $K_{x,y}(\tau)$ est donc le produit de convolution de 2 fonctions de $L^2(\mathbb{R})$. Elle est donc définie pour tout τ, continue et bornée (résultat du cours).

3. $K_{y,x}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)x(\tau - t)dt = K_{x,y}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t+\tau)x^*(t)dt = K_{x,y}^*(\tau)$.

4. D'après la formule de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} |K_{x,y}(\tau)|^2 &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt \times \int_{-\infty}^{+\infty} |y(\tau - t)|^2 \, dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt \times \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 \, dt \\ &= K_x(0)K_y(0) \end{aligned}$$

Pour $x = y$, on a donc $|K_x(\tau)| \leq K_x(0)$.

5. On a $K_{x,y}(\tau) = x * \widetilde{y}(\tau)$. Donc $S_{x,y} = TF\,(x * \widetilde{y}) = TF\,(x)\,TF\,(\widetilde{y})$. Cette égalité a lieu au sens des distributions lorsque les TF sont prises dans $L^2(\mathbb{R})$. En effet, x et $\widetilde{y}$ sont dans $L^2(\mathbb{R})$, donc leur TF doit être prise dans $L^2(\mathbb{R})$, mais $x * \widetilde{y}$ n'est pas a priori dans $L^2(\mathbb{R})$ (ni dans $L^1(\mathbb{R})$ d'ailleurs), donc n'admet pas de TF au sens des fonctions. Par contre, c'est une fonction bornée, donc elle définit une distribution tempérée, qui admet alors une TF, et alors la formule TF/convolution ci-dessus est vraie pour des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ (cf. cours). Notons que puisque $TF\,(x)$ et $TF\,(\widetilde{y})$ sont dans $L^2(\mathbb{R})$, alors $S_{x,y}$ est dans $L^1(\mathbb{R})$. En particulier, on a $\int_{\mathbb{R}} S_x(f)df = \int_{\mathbb{R}} |X(f)|^2 df = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt$ (par Parseval), qui est l'energie de la fonction x. C'est pour cela que S_x est une densité d'énergie, et puisqu'elle représente une distribution de l'énergie en fréquences, elle est dite *densité spectrale*.

   Il reste à calculer $TF\,(\widetilde{y})\,(f) = \lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^{+n} \widetilde{y}(t)e^{-2j\pi ft}dt$ (limite dans $L^2(\mathbb{R})$). Or, $\int_{-n}^{+n} \widetilde{y}(t)e^{-2j\pi ft}dt = \int_{-n}^{+n} y^*(-t)e^{-2j\pi ft}dt = \int_{-n}^{+n} y^*(t)e^{2j\pi ft}dt = \left(\int_{-n}^{+n} y(t)e^{-2j\pi ft}dt\right)^*$. D'où $TF\,(\widetilde{y})\,(f) = Y^*(f)$, ce qui montre le résultat. Pour $S_x(f)$, il suffit de prendre $x = y$, et donc $X = Y$.

6. x et y étant dans $L^2(\mathbb{R})$, $x+y$ l'est aussi (car $L^2(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert). Donc, d'après 5., $S_{x+y}(f) = |(X+Y)\,(f)|^2 = (X(f) + Y(f))\,(X^*(f) + Y^*(f)) = |X(f)|^2 + |Y(f)|^2 + X(f)Y^*(f) + X^*(f)Y(f) = S_x(f) + S_y(f) + 2\,\mathrm{Re}(S_{xy}(f))$.

7. On sait que $X(f) = T\sin_c(\pi Tf)$

   - d'après la formule précédente, on a donc $S_x(f) = T^2 \sin_c^2(\pi Tf)$;
   - d'autre part,

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t-\tau)dt = \int_{-T/2}^{T/2} x(t-\tau)dt = \int_{-T/2-\tau}^{T/2-\tau} x(u)du.$$

   Pour $\tau \geq T$, on a $u \leq -T/2\ \forall u \in [-T/2-\tau; T/2-\tau]$, et donc $x(u) = 0$. Doù $K_x(\tau) = 0$. De même, $K_x(\tau) = 0$ pour $\tau \leq -T$.

Pour $0 \leq \tau \leq T$, $x(u) = 0$ pour $u \in [-T/2 - \tau; -T/2]$. Donc $K_x(\tau) = \int_{-T/2}^{T/2-\tau} 1du = T - \tau$. De même, pour $-T \leq \tau \leq 0$, $K_x(\tau) = T + \tau$. Finalement, on peut écrire

$$K_x(\tau) = (T - |\tau|)\, 1_{[-T;T]}(t).$$

On calcule ensuite

$$S_x(f) = TF(K_x(\tau)) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_x(\tau) e^{-2j\pi f} df$$

($K_x(\tau)$ étant dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, sa TF dans $L^2(\mathbb{R})$ est la même que celle dans $L^1(\mathbb{R})$). On a alors

$$S_x(f) = \int_{-T}^{0} (T + \tau) e^{-2j\pi f \tau} d\tau + \int_{0}^{T} (T - \tau) e^{-2j\pi f \tau} d\tau.$$

En développant le calcul (intégration par partie et intégrale d'exponentielle ou de cosinus), on obtient

$$S_x(f) = \frac{1}{2\pi^2 f^2} \left(1 - \cos\left(2\pi f T\right)\right) = \frac{1}{\pi^2 f^2} \sin^2\left(\pi f T\right),$$

et on retrouve bien $S_x(f) = T^2 \sin_c^2(\pi T f)$.

8. On a $|z(t)|^2 = |x(t)\cos(2\pi f_0 t)|^2 \leq |x(t)|^2$. Donc $z \in L^2(\mathbb{R})$. Donc $Z(f) = \lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^{+n} z(t) e^{-2j\pi f t} dt$ (limite dans $L^2(\mathbb{R})$). Or,

$$\begin{aligned}
\int_{-n}^{+n} z(t) e^{-2j\pi f t} dt &= \int_{-n}^{+n} x(t) \cos\left(2\pi f_0 t\right) e^{-2j\pi f t} dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{-n}^{+n} x(t) \left(e^{2j\pi f_0 t} + e^{-2j\pi f_0 t}\right) e^{-2j\pi f t} dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{-n}^{+n} x(t) e^{-2j\pi (f - f_0) t} dt + \frac{1}{2} \int_{-n}^{+n} x(t) e^{-2j\pi (f + f_0) t} dt
\end{aligned}$$

D'où : $Z(f) = \frac{1}{2}\left(X(f - f_0) + X(f + f_0)\right)$.

Remarque : on a donc $Z = X * \frac{1}{2}\left(\delta_{f_0} + \delta_{-f_0}\right) = X * \widehat{\cos(2\pi f_0 t)}$. Cependant, on ne pouvait pas *a priori* écrire la formule $TF\left(x(t)\cos\left(2\pi f_0 t\right)\right) = X * \widehat{\cos(2\pi f_0 t)}$ car celle-ci n'est pas valable a priori entre une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ et une distribution tempérée. En effet, il faudrait que la fonction x soit $\mathcal{C}^\infty$ pour que le produit $x.\cos\left(2\pi f_0 t\right)$ ait un sens au sens des distributions. Or, on n'a pas fait de telle hypothèse sur x.

z étant dans $L^2(\mathbb{R})$, on peut alors écrire

$$\begin{aligned}
S_z(f) &= |Z(f)|^2 = \frac{1}{4}\Big(|X(f - f_0)|^2 + |X(f + f_0)|^2 + X(f - f_0)X^*(f + f_0) + X^*(f - f_0)X(f + f_0)\Big) \\
&= \frac{1}{4} S_x(f - f_0) + \frac{1}{4} S_x(f + f_0) + \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}(X(f - f_0)X^*(f + f_0))
\end{aligned}$$

9. $x(t) = 1_{[-T/2;T/2]}(t)$ est bien une fonction de $L^2(\mathbb{R})$, donc les calculs précédents sont valables. $S_z(f)$ est alors constituer de deux $\sin_c^2$ d'amplitude $T^2/4$, centrés en f_0 et $-f_0$, ainsi que d'un terme d'interférences entre fréquences positives et négatives (le terme $\mathrm{Re}(X(f - f_0)X^*(f + f_0))$). Or, pour $f_0 \gg 1/T$, $X(f - f_0)$ décroît rapidement quand f s'éloigne de f_0 alors que $X(f + f_0)$ décroît rapidement quand f s'éloigne de f_0 (il suffit de tracer la courbe pour le voir). Donc le produit $X(f - f_0)X^*(f + f_0)$ est quasiment nul pour tout f : ainsi, ce terme d'interférences est négligeable.

2 Corrélations et spectres de signaux périodiques

Question préliminaire : on a $p(t) = \left(m * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_{kT}\right)(t) = (m * Ш_T)(t)$ ($Ш_T$ est le “peigne” de Dirac de pas T). p étant localement intégrale, m l'est aussi, et elle est de plus à support compact. De plus $Ш_T$ est une distibution tempérée. Ainsi p est une distribution tempérée, et on a

$$\begin{aligned} P &= \widehat{m * Ш_T} = \widehat{m}\widehat{Ш}_T = \widehat{m}\frac{1}{T}Ш_{1/T} \quad \text{(résultat vu en cours)} \\ &= \frac{1}{T}\widehat{m}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_{k/T} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{m}\delta_{k/T} \end{aligned}$$

Or, $\widehat{m}\delta_{k/T} = \widehat{m}(k/T)\delta_{k/T}$. D'où $P = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{m}\left(\frac{k}{T}\right)\delta_{k/T}$.

1. x et y étant périodiques de période T, la fonction $t \longmapsto x(t)y^*(t-\tau)$ est $T-$périodique pour tout τ, et alors $K_{x,y}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} x(t)y^*(t-\tau)dt = \left(\int_0^T x(t)y^*(t-\tau)dt\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 1\right) = \infty$. L'intercorrélation $K_{x,y}(\tau)$ ne serait donc pas définie pour toutes fonctions x et y et pour tout τ (sauf cas particulier où $\int_0^T x(t)y^*(t-\tau)dt = 0$, mais on veut une expression de l'intercorrélation finie pour toutes fonctions x et y, et tout τ).

2. On utilise les mêmes calculs qu'à la question 1.4, ce qui montre à la fois que $R_{xy}(\tau)$ et $R_x(\tau)$ sont finies pour tout τ, et bornées respectivement par $(R_x(0)R_y(0))^{1/2}$ et par $R_x(0)$.

   D'autre part, $R_{xy}(\tau + T) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t+T)y^*(t+T-\tau)dt = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)y^*(t-\tau)dt = R_{xy}(\tau)$.

3. On a

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \frac{1}{T}\int_0^T \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^x e^{2j\pi kt/T}\right)\left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} (c_l^y)^* e^{-2j\pi l(t-\tau)/T}\right)dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{k,l=-\infty}^{+\infty} c_k^x (c_l^y)^* e^{2j\pi(k-l)t/T}e^{2j\pi l\tau/T}dt \end{aligned}$$

   On va inverser $\int_0^T$ et $\sum_{k,l=-\infty}^{+\infty}$ en appliquant le théorème de Fubini à cette “intégrale” triple. On montre pour cela que l'“intégrale” en module est finie, en “intégrant” dans n'importe quel ordre. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=-\infty}^{+\infty}\int_0^T \frac{1}{T}\left|c_k^x (c_l^y)^* e^{2j\pi(k-l)t/T}e^{2j\pi l\tau/T}\right|dt &= \sum_{k,l=-\infty}^{+\infty} |c_k^x|\,|c_l^y|\int_0^T \frac{dt}{T} \\ &= \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k^x|\right)\left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty}|c_l^y|\right) < +\infty \text{ par hypothèse.} \end{aligned}$$

   On peut donc, d'après Fubini, intégrer dans n'importe quel ordre, en enlevant les modules. Ainsi :

$$R_{xy}(\tau) = \sum_{k,l=-\infty}^{+\infty} c_k^x (c_l^y)^* e^{2j\pi l\tau/T}\frac{1}{T}\int_0^T e^{2j\pi(k-l)t/T}dt$$

   Or,

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{2j\pi(k-l)t/T}dt = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases}$$

   D'où,

$$R_{xy}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^x c_k^{y^*} e^{2j\pi k\tau/T}$$

Ainsi, pour $x = y$, on a

$$R_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k^x|^2 \, e^{2j\pi k\tau/T}.$$

4. On a, $\forall \varphi \in S(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\left\langle \widehat{T}, \varphi \right\rangle &= \left\langle \widehat{\sum_{n=1}^{+\infty} T_n}, \varphi \right\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{+\infty} T_n, \widehat{\varphi} \right\rangle \\
&= \lim_{N \to +\infty} \left\langle \sum_{n=1}^{N} T_n, \widehat{\varphi} \right\rangle = \lim_{N \to +\infty} \left\langle \widehat{\sum_{n=1}^{N} T_n}, \varphi \right\rangle = \lim_{N \to +\infty} \left\langle \sum_{n=1}^{N} \widehat{T}_n, \varphi \right\rangle
\end{aligned}$$

Donc

$$\widehat{T} = \widehat{\sum_{n=1}^{+\infty} T_n} = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \widehat{T}_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{T}_n$$

5. Si $\sum_k |c_k^x|$ et $\sum_k |c_k^y|$ sont finis, on a :

$$\begin{aligned}
R_{xy}(\tau) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^x c_k^{y^*} \, e^{2j\pi k\tau/T} \\
R_x(\tau) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k^x|^2 \, e^{2j\pi k\tau/T}
\end{aligned}$$

Les exponentielles complexes sont des distributions tempérées, et $R_{xy}(\tau)$ et $R_x(\tau)$ sont également tempérées, puisque ce sont des fonctions bornées. On peut donc appliquer le résultat précédent, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
S_{xy} &= \widehat{R_{xy}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^x c_k^{y^*} \, \widehat{e^{2j\pi k\tau/T}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^x c_k^{y^*} \, \delta_{\frac{k}{T}} \\
S_x &= \widehat{R_x} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k^x|^2 \, \widehat{e^{2j\pi k\tau/T}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k^x|^2 \, \delta_{\frac{k}{T}}
\end{aligned}$$

6. On peut écrire

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{A}{2}\left(e^{2j\pi f_0 t} + e^{-2j\pi f_0 t}\right) + \frac{B}{2j}\left(e^{2j\pi f_0 t} - e^{-2j\pi f_0 t}\right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^x e^{2j\pi k t/T}
\end{aligned}$$

avec

$$T = \frac{1}{f_0},\ c_1^x = \frac{A}{2} + \frac{B}{2j},\ c_{-1}^x = \frac{A}{2} - \frac{B}{2j},\ \text{et } c_k^x = 0 \text{ pour } k \neq \pm 1$$

On a donc $\sum_k |c_k^x| < +\infty$, et on peut appliquer la formule précédente. D'où :

$$S_x(f) = \frac{A^2 + B^2}{4} \left(\delta_{f_0} + \delta_{-f_0}\right)\ ,$$

qui se représente graphiquement par deux flèches en f_0 et $-f_0$ d'amplitudes $\frac{A^2+B^2}{4}$.