Correction de l'examen d'Analyse de Fourier I
mercredi 15 novembre 2006

1 Questions

1. La fonction $f(t) = \frac{1-\cos t}{t^2}$ est continue en 0 car $\cos t \underset{t\to 0}{\sim} 1 - \frac{t^2}{2}$ en 0, et donc $\frac{1-\cos t}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{2}$. De plus, $|f(t)| \leq \frac{2}{t^2}$, qui s'intègre en $\pm\infty$. Donc f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. La valeur de f sur $\mathbb{Q}$ n'a pas d'importantce (ensemble négligeabe). D'autre part, $\frac{1}{\sqrt{|t|}}$ s'intègre bien en 0, et $\frac{1}{t^2}$ s'intègre en $\pm\infty$. Donc $f \in L^1(\mathbb{R})$ (par contre, $f \notin L^2(\mathbb{R})$, car $\frac{1}{|t|}$ ne s'intègre pas en 0). De plus, g est bornée par 1, donc $g \in L^\infty(\mathbb{R})$. Ainsi, $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$ avec $1/p + 1/q = 1$. Dans ce cas, $f * g$ est défini partout, continu, et borné (cf. cours).

3.
   - $\frac{\sin(\pi a t)}{\pi t}$ et $\frac{\sin(\pi b t)}{\pi t}$ sont dans $L^2(\mathbb{R})$ (et non dans $L^1(\mathbb{R})$) ; ainsi, $\frac{\sin(\pi a t)}{\pi t} * \frac{\sin(\pi b t)}{\pi t} \in L^\infty(\mathbb{R})$, donc sa transformée de Fourier n'est pas définie au sens des fonctions (elle l'est au sens des distributions)
   - On a $\cos(2\pi f_0 t) \in L^\infty(\mathbb{R})$, et $e^{-\alpha|t|^2} \in L^1(\mathbb{R})$. Donc, $\cos(2\pi f_0 t) * e^{-\alpha|t|^2} \in L^\infty(\mathbb{R})$, donc sa TF n'est pas définie au sens des fonctions (elle l'est au sens des distributions). De plus, $\cos(2\pi f_0 t)$ n'est ni dans $L^1(\mathbb{R})$, ni dans $L^2(\mathbb{R})$. Donc sa TF n'est pas définie au sens des fonctions.

2 Transformée de Gabor

Soit w une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} |w(x)|^2 \, dx = 1$. Cette fonction est appelée *fenêtre.* Soit f une fonction de $L^2(\mathbb{R})$. La *transformée de Gabor* de f relativement à la fenêtre w est la fonction W_f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$W_f(x, y) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{w}(t-y)e^{-2j\pi x t} dt$$

Cette transformée de Gabor est notamment utilisée en traitement du signal pour la localisation à la fois en temps et en fréquences d'un signal.

1. $\forall y$, $\int_{\mathbb{R}} |F_y(t)| \, dt = \int_{\mathbb{R}} |f(t)\overline{w}(t-y)| \, dt \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \, dt\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |w(t-y)|^2 \, dt\right)^{1/2}$(Cauchy-Schwarz) $= \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \, dt\right)^{1/2}$ (car $\int_{\mathbb{R}} |w(x)|^2 \, dx = 1$) $= \|f\|_{L^2} < +\infty$ par hypothèse. Donc $F_y \in L^1(\mathbb{R})$.

2. On a : $\forall y \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}$, $\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}(f(t)\overline{w}(t-y)e^{-2j\pi x t})\right| = \left|(-2j\pi t)^k f(t)\overline{w}(t-y)e^{-2j\pi x t}\right| = (2\pi)^k |f(t)| \left|t^k \overline{w}(t-y)\right|$. Or $f \in L^2(\mathbb{R})$, et $t^k\overline{w}(t-y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (car $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par multiplication par un polynôme). Donc, de même que précédemment, $(2\pi)^k |f(t)| \left|t^k\overline{w}(t-y)\right| \in L^1(\mathbb{R})$, et le théorème de dérivation sous $\int$ s'applique à tout ordre. Donc $\forall y \in \mathbb{R}$, l'application $x \mapsto W_f(x, y)$ est de classe C^∞.

3. On a $W_f(x, y) = TF(F_y)(x)$ (la TF étant calculée en intégrant par rapport à t). Donc, d'après le théorème de Riemann-Lebesque, $W_f(x, y) \to 0$ quand $|x| \to +\infty$.

4. On admet que $\int_{\mathbb{R}} |W_f(x, y)|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 |\overline{w}(t-y)|^2 \, dt$. Ainsi, $\int_{\mathbb{R}^2} |W_f(x, y)|^2 \, dxdy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |W_f(x, y)|^2 \, dx\right) dy$ (théorème de Tonnelli pour des fonctions positives) $= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 |\overline{w}(t-y)|^2 \, dt\right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 |\overline{w}(t-y)|^2 \, dy\right) dt$ (toujours Tonnelli) $= \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \left(\int_{\mathbb{R}} |\overline{w}(t-y)|^2 \, dy\right) dt = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \left(\int_{\mathbb{R}} |w(u)|^2 \, du\right) dt$ (en posant $u = t - y$) $= \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \, dt$ (car $\int_{\mathbb{R}} |w(x)|^2 \, dx = 1$).

5. On a :

$$\begin{aligned} W_f(x,y) &= \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{w}(t-y)e^{-2j\pi xt}dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} TF^{-1}(\widehat{f})(t)\overline{w}(t-y)e^{-2j\pi xt}dt \text{ (car } \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\nu)TF^{-1}(\overline{w}(t-y)e^{-2j\pi xt})(\nu)d\nu \text{ (car } w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow w \in L^1(\mathbb{R})) \\ & \quad \text{(la } TF^{-1} \text{ étant prise par rapport à } t) \end{aligned}$$

De plus, $TF^{-1}(\overline{w}(t-y)e^{-2j\pi xt})(\nu) = \int_{\mathbb{R}} \overline{w}(t-y)e^{-2j\pi xt}e^{2j\pi\nu t}dt = TF\left(\overline{w}(t-y)\right)(x-\nu) = \widehat{\overline{w}}(x-v)e^{-2j\pi(x-v)y} = e^{-2j\pi xy}\widehat{\overline{w}}(x-v)e^{2j\pi vy}$. D'où le résultat.

6. On a donc

$$\int_{\mathbb{R}^2} W_f(z,y)w(x-y)e^{2j\pi xz}dzdy = \int_{\mathbb{R}^2}\left(e^{-2j\pi zy}\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\nu)\widehat{\overline{w}}(z-\nu)e^{2j\pi\nu y}d\nu\right)w(x-y)e^{2j\pi xz}dzdy.$$

On souhaite inverser les $\int$. Pour cela, on applique Fubini, en commençant par calculer l'intégrale multiple en modules, dans n'importe quel ordre. On a :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3}\left|\left(e^{-2j\pi zy}\widehat{f}(\nu)\widehat{\overline{w}}(z-\nu)e^{2j\pi\nu y}d\nu\right)w(x-y)e^{2j\pi xz}\right|d\nu dzdy \\ = & \left(\int_{\mathbb{R}}|w(x-y)|\,dy\right)\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{f}(\nu)\right|\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{\overline{w}}(z-\nu)\right|dz\right)d\nu\right) \\ = & \left(\int_{\mathbb{R}}|w(u)|\,du\right)\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{f}(\nu)\right|d\nu\right)\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{\overline{w}}(s)\right|ds\right) \\ < & +\infty \qquad \text{car } w,\ \widehat{w}, \text{ et } \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

On peut donc intégrer dans n'importe quel ordre, cette fois-ci sans les modules :

$$\int_{\mathbb{R}^2} W_f(z,y)w(x-y)e^{2j\pi xz}dzdy = \int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\nu)\left(\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}e^{2j\pi z(x-y)}\widehat{\overline{w}}(z-\nu)dz\right)e^{2j\pi\nu y}w(x-y)dy\right)d\nu.$$

Or, $\int_{\mathbb{R}} e^{2j\pi z(x-y)}\widehat{\overline{w}}(z-\nu)dz = TF^{-}(\widehat{\overline{w}}(z-\nu))(x-y) = TF^{-}(\widehat{\overline{w}})(x-y)e^{2j\pi(x-y)\nu} = \overline{w}(x-y)e^{2j\pi(x-y)\nu}$. Donc,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} W_f(z,y)w(x-y)e^{2j\pi xz}dzdy &= \int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\nu)\left(\int_{\mathbb{R}}\overline{w}(x-y)e^{2j\pi(x-y)\nu}e^{2j\pi\nu y}w(x-y)dy\right)d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\nu)e^{2j\pi x\nu}\left(\int_{\mathbb{R}}|w(x-y)|^2\,dy\right)d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\nu)e^{2j\pi x\nu}\left(\int_{\mathbb{R}}|w(u)|^2\,du\right)d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\nu)e^{2j\pi x\nu}d\nu = f(x) \end{aligned}$$

3 Distributions et électromagnétisme

1. On a : $F = F*\delta = F*\left(E''+\omega^2E\right) = F*\left(\delta''+\omega^2\delta\right)*E = \left(F''+\omega^2F\right)*E = \delta*E = E$.

2. $E = Uy$. Donc, $E' = U'y + Uy' = \delta y + Uy' = y(0)\delta + Uy'$. D'où : $E'' = y(0)\delta' + U'y' + Uy'' = y(0)\delta' + U'y' + Uy'' = y(0)\delta' + y'(0)\delta + Uy''$. On a donc

$$E'' + \omega^2E = y(0)\delta' + y'(0)\delta + Uy'' + \omega^2Uy = y(0)\delta' + y'(0)\delta + \left(y''+\omega^2y\right)U$$

Pour vérifier l'équation $E'' + \omega^2 E = \delta$, la fonction y doit donc vérifier

$$\left(y'' + \omega^2 y\right) = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

3. y s'écrit donc sous la forme :

$$y(t) = Ae^{j\omega t} + Be^{-j\omega t}$$

Les conditions aux limites donnent :

$$\begin{aligned} y(0) &= A + B = 0 \\ y'(0) &= j\omega A - j\omega B = 1 \end{aligned}$$

On en déduit $A = -B = 1/(2j\omega)$. D'où

$$y(t) = \frac{\sin \omega t}{\omega}$$

4. Ainsi, $X = S * E = S * (Uy)$. D'où

$$X(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega u}{\omega} S(t-u) du$$