Correction de l'examen d'Analyse de Fourier I
mercredi 7 novembre 2007

1 Questions

1. $\int_{[0,1]} f d\mu_d = 1 \times \mu_d([0,1] \cap \mathbb{Q}) + 0 \times \mu_d([0,1] \backslash \mathbb{Q})$. Or, $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ contient une infinité d'éléments, donc $\mu_d([0,1] \cap \mathbb{Q}) = +\infty$, et $\int_{[0,1]} f d\mu_d = +\infty$.

2. $|f(x)| \leq \mathbb{I}_{]0,\pi]}(x)$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour la mesure de Lebesgue. Donc f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

3. On a $\frac{1}{k^2+n^2} \leq \frac{1}{k^2}$ $\forall n$, et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$. De plus, $\frac{1}{k^2+n^2} \to 0$ quand $n \to +\infty$, $\forall k$. Donc d'après le théorème de la convergence dominée (qui s'applique aussi aux $\sum$), on a $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+n^2}$ $\to 0$ quand $n \to +\infty$?

4. h_a et h_b sont dans $L^1(\mathbb{R})$. Donc $\widehat{h_a * h_b}(f) = \widehat{h}_a(f)\widehat{h}_b(f) = \frac{4ab}{(a^2+4\pi^2f^2)(b^2+4\pi^2f^2)} = \frac{4ab}{b^2-a^2}\left(\frac{1}{a^2+4\pi^2f^2} - \frac{1}{b^2+4\pi^2f^2}\right)$ $\frac{1}{b^2-a^2}\left(\widehat{2be^{-a|t|}}(f) - \widehat{2be^{-b|t|}}(f)\right)$. Donc $h_a * h_b(t) = \frac{1}{b^2-a^2}\left(2be^{-a|t|} - 2be^{-b|t|}\right)$.

2 Transformée de Fourier et Equation différentielle

On considère l'équation des cordes vibrantes, donnée par :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t), \qquad t > 0 \tag{1}$$

avec les conditions initiales :

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f_1(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= f_2(x) \end{aligned}$$

où f_1 et f_2 sont deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ pour la mesure de Lebesgue. On suppose que u, f_1, et f_2 sont C^∞ et suffisamment régulières pour pouvoir dériver par rapport à t sous le signe $\int$ autant de fois que nécessaire.
On note $\widehat{u}(\xi,t)$ la transformée de Fourier en ξ de l'application $x \mapsto u(x,t)$, supposée intégrable pour tout t, c'est-à-dire :

$$\widehat{u}(\xi,t) = \int_{\mathbb{R}} u(x,t)e^{-2j\pi x\xi}dx$$

1. $\widehat{u}(\xi,0) = \int_{\mathbb{R}} u(x,0)e^{-2j\pi x\xi}dx = \int_{\mathbb{R}} f_1(x)e^{-2j\pi x\xi}dx = \widehat{f_1}(\xi)$. $\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\xi,0) = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}} u(x,0)e^{-2j\pi x\xi}dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)e^{-2j\pi x\xi}dx = \widehat{f_2}(\xi)$ (en utilisant $\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}} = \int_{\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial t}$). De même, $\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial t^2}(\xi,t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)e^{-2j\pi x\xi}dx = c^2\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)e^{-2j\pi x\xi}dx = c^2\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}(\xi,t) = c^2(2j\pi\xi)^2\widehat{u}(\xi,t)$ (formule de TF de la dérivée seconde). D'où le résultat.

2. On a $\widehat{u}(\xi,0) = A(\xi) + B(\xi) = \widehat{f_1}(\xi)$, et $\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\xi,0) = 2j\pi c\xi A(\xi) - 2j\pi c\xi B(\xi) = \widehat{f_2}(\xi)$. On en déduit le résultat.

3. f_2 étant intégrable, on a $h'(x) = f_2(x)$ p.p. (voir cours), et donc partout car f_2 est continue. Donc h est C^1. Donc $\widehat{f_2}(\xi) = \widehat{h'}(\xi) = 2j\pi\xi\widehat{h}(\xi)$ (formule de TF de la dérivée).

4. On a donc $\widehat{u}(\xi,t) = \frac{1}{2}\widehat{f}_1(\xi)\left(e^{2j\pi c\xi t}+e^{-2j\pi c\xi t}\right)+\frac{1}{2c}\widehat{h}(\xi)\left(e^{2j\pi c\xi t}-e^{-2j\pi c\xi t}\right) = \frac{1}{2}\left(f_1\widehat{(x+ct)}(\xi)+f_1\widehat{(x-ct)}(\xi)\right)$ $\frac{1}{2c}\left(h\widehat{(x+ct)}(\xi)-h\widehat{(x-ct)}(\xi)\right)$ (d'après la formule du retard). Par injectivité, $u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f_1(x+ct)+f_1(x\right.$ $\frac{1}{2c}\left(h(x+ct)-h(x-ct)\right) = \frac{1}{2}\left(f_1(x+ct)+f_1(x-ct)\right)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} f_2(v)dv$.

3 Distributions

1. On obtient $\omega\left(\cos\omega t\right)E-\left(\sin\omega t\right)E' = \omega A$ et $\omega\left(\sin\omega t\right)E+\left(\cos\omega t\right)E' = \omega B$. D'où A et B.

2. En dérivant, $A' = -\omega\left(\sin\omega t\right)E+\left(\cos\omega t\right)E'-\left(\cos\omega t\right)E'-\frac{1}{\omega}\left(\sin\omega t\right)E''$ et $B' = \omega\left(\cos\omega t\right)E+\left(\sin\omega t\right)E'-\left(\sin\omega t\right)E'+\frac{1}{\omega}\left(\cos\omega t\right)E''$. D'où $\left(\cos\omega t\right)A'+\left(\sin\omega t\right)B' = -\omega\left(\sin\omega t\right)\left(\cos\omega t\right)E-\frac{1}{\omega}\left(\sin\omega t\right)\left(\cos\omega t\right)E''+\omega\left(\sin\omega t\right)\left(\cos\omega t\right)E+\frac{1}{\omega}\left(\sin\omega t\right)\left(\cos\omega t\right)E'' = 0$.

3. On a : $E'' = -\omega^2\left(\cos\omega t\right)A-\omega\left(\sin\omega t\right)A'-\omega^2\left(\sin\omega t\right)B+\omega\left(\cos\omega t\right)B'$. D'où $\delta = E''+\omega^2E = -\omega\left(\sin\omega t\right)A'+\omega\left(\cos\omega t\right)B'$.

4. On obtient $A' = -\left(\sin\omega t\right)\delta = -\left(\sin\omega 0\right)\delta = -0\delta = 0$. Et $\omega B' = \left(\cos\omega t\right)\delta = \left(\cos\omega 0\right)\delta = \delta$. Donc $B' = \frac{1}{\omega}\delta$.

5. On a donc : $A = \lambda$ et $B = \frac{1}{\omega}(U+\mu)$, où λ et μ sont des réels quelconques. D'où : $E = \lambda\left(\cos\omega t\right)+\frac{1}{\omega}\left(\sin\omega t\right)(U+\mu)$.

6. On a : $E' = -\omega\lambda\left(\sin\omega t\right)+\frac{1}{\omega}\left(\sin\omega t\right)\delta+(U+\mu)\left(\cos\omega t\right) = -\omega\lambda\left(\sin\omega t\right)+(U+\mu)\left(\cos\omega t\right)$ car $\left(\sin\omega t\right)\delta = 0$. Donc $E'' = -\omega^2\lambda\left(\cos\omega t\right)+\left(\cos\omega t\right)\delta-\omega\left(\sin\omega t\right)(U+\mu) = -\omega^2\lambda\left(\cos\omega t\right)+\delta-\omega\left(\sin\omega t\right)(U+\mu)$ car $\left(\cos\omega t\right)\delta = \delta$. On a donc bien $E''+\omega^2E = \delta$.