Corrigé de l'examen d'Analyse de Fourier
mercredi 26 novembre 2008

1 Transformée de Hankel

1. La fonction est clairement 2π-périodique. En posant $u = \theta - \alpha$, on intègre une fonctiont 2π-périodique entre $-\pi - \alpha$ et $\pi - \alpha$, ce qui revient à l'intégrer entre $-\pi$ et π. Donc J_0 ne dépend pas de α.

2. On a clairement $\int_{-\pi}^{+\pi} \sin(t\cos\theta)d\theta = 2\int_0^{+\pi} \sin(t\cos\theta)d\theta$. Et $\int_0^{+\pi} \sin(t\cos\theta)d\theta = \int_0^{+\pi/2} \sin(t\cos\theta)d\theta + \int_{\pi/2}^{+\pi} \sin(t\cos\theta)d\theta = \int_0^{+\pi/2} \sin(t\cos(\pi/2-u))du + \int_0^{+\pi/2} \sin(t\cos(\pi/2+u))du$. Or, pour tout $u \in [0;\pi/2]$, on a : $\sin(t\cos(\pi/2-u)) = \sin(t\sin t) = -\sin(t\cos(\pi/2+u))$. Donc $\int_{-\pi}^{+\pi} \sin(t\cos\theta)d\theta = 0$, et $J_0(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(t\cos\theta)\,d\theta$ est réel.

3. La parité est évidente.

4. La fonction f étant intégrable dans $\mathbb{R}^2$, on peut intégrer dans n'importe quel ordre, et utiliser la formule de changement de variables.

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi_1,\xi_2) &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1,x_2)e^{-2j\pi(x_1\xi_1+x_2\xi_2)}dx_1dx_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} F(\|x\|)e^{-2j\pi(x_1\xi_1+x_2\xi_2)}dx_1dx_2
\end{aligned}
$$

En faisant le changement de variables donné (déjà vu en cours), on a :

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi_1,\xi_2) &= \int_{\mathbb{R}^+\times[0,2\pi]} rF(r)e^{-2j\pi r(\xi_1\cos\theta+\xi_2\sin\theta)}drd\theta \\
&= \int_{\mathbb{R}^+\times[0,2\pi]} rF(r)e^{-2j\pi r\|\xi\|(\cos\varphi\cos\theta+\sin\varphi\sin\theta)}drd\theta \\
&= \int_{\mathbb{R}^+\times[0,2\pi]} rF(r)e^{-2j\pi r\|\xi\|\cos(\theta-\varphi)}drd\theta \\
&= 2\pi\int_0^{+\infty} rJ_0(2\pi\|\xi\|r)F(r)dr
\end{aligned}
$$

5. $\widehat{f}(\xi_1,\xi_2)$ ne dépend donc que de $\|\xi\| = \sqrt{\xi_1+\xi_2}$. Donc $\widehat{f}$ est radiale.

6. En posant $f(x) = F(\|x\|)$ la fonction radiale associée à F, on a $TH(F)(\rho) = \widehat{f}(\xi_1,\xi_2)$ avec $\rho = \|\xi\| = \sqrt{\xi_1+\xi_2}$. D'après la formule d'inversion, on a, pour $r = \|x\|$, et $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$:

$$
\begin{aligned}
F(r) &= f(x_1,x_2) = \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{f}(\xi_1,\xi_2)e^{+2j\pi(x_1\xi_1+x_2\xi_2)}d\xi_1d\xi_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2}\left(2\pi\int_0^{+\infty} uJ_0(2\pi\|\xi\|u)F(u)du\right)e^{+2j\pi r(\cos\theta\xi_1+\sin\theta\xi_2)}d\xi_1d\xi_2 \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\left(2\pi\int_0^{+\infty} uJ_0(2\pi\rho u)F(u)du\right)e^{+2j\pi r\rho(\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi)}\rho d\varphi d\rho \\
&= \int_0^{+\infty} TH(F)(\rho)\rho\left(\int_0^{2\pi} e^{+2j\pi r\rho\cos(\varphi-\theta)}d\varphi\right)d\rho \\
&= 2\pi\int_0^{+\infty} \rho J_0(2\pi\rho r)TH(F)(\rho)d\rho
\end{aligned}
$$

car $\int_0^{2\pi} e^{+2j\pi r\rho\cos(\varphi-\theta)}d\varphi = 2\pi J_0(2\pi\rho r)$. L'égalité a lieu partout puisqu'on suppose F continue.

7. On a

$$\begin{aligned}
TH\left(dil_a(F)\right) &= 2\pi\int_0^{+\infty} rJ_0(2\pi\rho r)F(ar)dr \\
&= 2\pi\int_0^{+\infty} \frac{u}{a}J_0(2\pi\rho\frac{u}{a})F(u)\frac{1}{a}du \\
&= \frac{1}{a^2}2\pi\int_0^{+\infty} J_0(2\pi\frac{\rho}{a}u)F(u)du \\
&= \frac{1}{a^2}TH(F)(\frac{\rho}{a}) = \frac{1}{a^2}dil_{1/a}\left(TH(F)\right)(\rho)
\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} rF(r)\overline{G(r)}dr &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} rF(r)\overline{G(r)}d\theta dr \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\sqrt{x_1^2+x_2^2}F(\|x\|)\overline{G(\|x\|)}\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}dx_1dx_2 \text{ (changement pôlaires} \to \text{cartésiennes)} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} f(x_1,x_2)\overline{g(x_1,x_2)}dx_1dx_2 \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{f}(\xi_1,\xi_2)\overline{\widehat{g}(\xi_1,\xi_2)}d\xi_1d\xi_2 \quad \text{(Parseval)} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} \rho TH(F)(\rho)\overline{TH(G)(\rho)}d\rho d\theta \text{ (changement cartésiennes} \to \text{pôlaires)} \\
&= \int_0^{+\infty} \rho TH(F)(\rho)\overline{TH(G)(\rho)}d\rho
\end{aligned}$$

9. Pour $\rho = \|\xi\|$, on a $TH(F)(\rho) = \widehat{f}(\xi_1,\xi_2) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi(x_1^2+x_2^2)}e^{-2j\pi(x_1\xi_1+x_2\xi_2)}dx_1dx_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x_1^2}e^{-2j\pi x_1\xi_1}dx_1\right)$ $\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x_2^2}e^{-2j\pi x_2\xi_2}dx_2\right) = e^{-\pi\xi_1^2}e^{-\pi\xi_2^2}$. Donc $TH(F)(\rho) = e^{-\pi\rho^2}$.

2 Distributions

2.1 Transformée de Fourier d'une distribution homogène

1. Exprimer $\widehat{\varphi_\alpha}(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\alpha x)e^{-2j\pi tx}dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(u)e^{-2j\pi t\frac{u}{\alpha}}\frac{1}{\alpha}du = \frac{1}{\alpha}\widehat{\varphi}(\frac{t}{\alpha})$.
2. $\left\langle \widehat{T},\varphi_\alpha\right\rangle = \langle T,\widehat{\varphi_\alpha}\rangle = \left\langle T,\frac{1}{\alpha}\left(\widehat{\varphi}\right)_{\frac{1}{\alpha}}\right\rangle = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{-(d+1)}\langle T,\widehat{\varphi}\rangle = \alpha^d\left\langle \widehat{T},\varphi\right\rangle$. Donc $\widehat{T}$ est homogène de degré $-d-1$.

2.2 Convergence vers δ

1. φ continue en 0 ssi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que $|t| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |\varphi(t) - \varphi(0)| < \varepsilon$.
2. $T_n \underset{n\to\infty}{\to} T$.dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ssi $\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\langle T_n,\varphi\rangle \underset{n\to\infty}{\to} \langle T,\varphi\rangle$.
3.

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\varphi(t)dt - \varphi(0)\right| dt &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\left(\varphi(t)-\varphi(0)\right)dt\right| \\
&= \left|\int_{\left[-\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right]} f_n(t)\left(\varphi(t)-\varphi(0)\right)dt\right| \\
&\leq \int_{\left[-\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right]} |f_n(t)|\,|\varphi(t)-\varphi(0)|\,dt
\end{aligned}$$

or, il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que $|t| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |\varphi(t) - \varphi(0)| < \varepsilon$. Soit N_ε tel que $1/N_\varepsilon < \eta_\varepsilon$. Alors, $\forall n \geq N_\varepsilon$, $|\varphi(t) - \varphi(0)| < \varepsilon$. D'où :

$$\forall n \geq N_\varepsilon, \qquad \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\varphi(t)dt - \varphi(0) \right| dt \leq \varepsilon \int_{\left[-\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right]} |f_n(t)|\, dt = \varepsilon \int_{\left[-\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right]} f_n(t)dt$$

4. On a donc : $\forall \varepsilon > 0$, il existe N_ε tel que

$$\forall n \geq N_\varepsilon, \qquad \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\varphi(t)dt - \varphi(0) \right| dt \leq \varepsilon$$

ce qui montre que $\langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\varphi(t)dt \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$. Donc $T_{f_n} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \delta$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.