Examen de

Mesure-Intégration, Analyse de Fourier, Distributions, Espaces de Hilbert, Ondelettes.

lundi 17 décembre 2001 - durée : 2 heures

documents autorisés : notes de cours, TD, TP.

Remarque : dans tout l'énoncé, $\int_a^b f(x)dx$ désigne l'intégrale de Lebesgue $\int_{[a;b]} f d\lambda$ de f sur $[a,b]$ $(-\infty \leq a \leq b \leq +\infty)$ par rapport à la mesure de Lebesgue λ.

Exercice 1 : Intégrales de Lebesgue et Transformée de Fourier.
On note $\mathcal{C}^0$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ tendant vers zéro à l'infini. On sait que si f est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, sa transformée de Fourier $\widehat{f} = TF(f)$ appartient à $\mathcal{C}^0$. On peut donc noter : $TF(L^1(\mathbb{R})) \subset \mathcal{C}^0$.
Le but de cet exercice est de montrer que cette inclusion est stricte, c'est-à-dire qu'il existe des fonctions de $\mathcal{C}^0$ qui ne s'écrivent pas comme transformée de Fourier d'une fonction intégrable.
Soit f une fonction intégrable **impaire**.

1. Montrer que la fonction $t \longmapsto \frac{\widehat{f}(t)}{t}$ est intégrable sur tout intervalle $\left[\frac{1}{n}, n\right]$, où $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\widehat{f}(t) = -2i \int_0^{+\infty} f(x) \sin(2\pi t x) dx.$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide du théorème de Fubini, montrer que
$$\int_{1/n}^{n} \frac{\widehat{f}(t)}{t} dt = -2i \int_0^{+\infty} f(x)\phi_n(x) dx$$
où
$$\phi_n(x) = \int_{x/n}^{nx} \frac{\sin(2\pi u)}{u} du.$$
4. On montre qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $|\phi_n(x)| \leq M$. En déduire que
$$\lim_{n \to +\infty} \int_{1/n}^{n} \frac{\widehat{f}(t)}{t} dt = -i\pi \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$
5. Soit g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ intégrable telle que $\widehat{g}$ soit impaire. Montrer qu'il existe une fonction h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ intégrable et impaire telle que $h(x) = g(x)$ *p.p.* x.
6. Soit la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ impaire appartenant à $\mathcal{C}^0$ telle que :
$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{1+|\ln t|}, \text{ pour } t > 0 \\ g(t) &= g(-t) \quad , \text{ pour } t < 0 \\ g(0) &= 0 \end{aligned}$$
A l'aide des questions 4 et 5, montrer que $g \notin TF(L^1(\mathbb{R}))$ (on admettra que $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t(1+|\ln t|)} = +\infty$).

Exercice 2 : Distributions

On note $\mathcal{D}$ l'espace des fonctions C^∞ à support compact, et $\mathcal{D}'$ l'espace des distributions définies sur $\mathbb{R}$. La convergence dans $\mathcal{D}'$ d'une suite de distributions T_n vers une distribution T est notée $T_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{D}'}{\longrightarrow}} T$. De plus, pour une fonction f localement intégrable sur $\mathbb{R}$, T_f désigne la distribution régulière associée.

Dans cet exercice, on cherche à déterminer la limite dans $\mathcal{D}'$ de la suite de distributions T_{f_n}, où f_n est définie par

$$\begin{array}{ll} f_n(t) = n^2 \sin(nt) & \text{pour } t \in \left[-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right] \\ f_n(t) = 0 & \text{sinon.} \end{array}$$

1. Montrer que si la suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a, alors $\delta_{a_n} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{D}'}{\longrightarrow}} \delta_a$.

2. Soit u_n la fonction définie par

$$\begin{array}{ll} u_n(t) = -\sin(nt) & \text{pour } t \in \left[-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right] \\ u_n(t) = 0 & \text{sinon.} \end{array}$$

   Montrer que $T_{u_n} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{D}'}{\longrightarrow}} 0$.

3. En déduire la limite dans $\mathcal{D}'$ de la suite T_{v_n} où v_n est la fonction définie par

$$\begin{array}{ll} v_n(t) = -n\cos(nt) & \text{pour } t \in \left[-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right] \\ v_n(t) = 0 & \text{sinon.} \end{array}$$

   (faire attention aux discontinuités de u_n ...)

4. Déterminer alors la limite de T_{f_n} dans $\mathcal{D}'$.

5. Retrouver cette limite en calculant directement la limite de $\langle T_{f_n}, \varphi\rangle$ pour une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}$ quelconque.

Exercice 3 : Espaces de Hilbert.

On considère l'ensemble

$$E = \left\{ f \in \mathcal{C}([0,1]) \text{ t.q. } \int_0^1 \frac{f^2(t)}{t}\, dt < +\infty \right\}.$$

1. Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $L^2(0,1)$.

2. Montrer que toute fonction $f \in \mathcal{C}([0,1])$ s'annulant en 0 et dérivable en 0 appartient à E. La réciproque est-elle vraie ?

3. On note :

$$\forall (f,g) \in E \times E, \ < f, g >= \int_0^1 \frac{f(t)\, g(t)}{t}\, dt \ .$$

   Monter que $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire sur E.

4. Soit $(P_n)_{n\geq 1}$ la famille orthonormale pour le produit scalaire $< \cdot, \cdot >$, obtenue par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à la famille de vecteurs de E formée des monômes $(x^n)_{n\geq 1}$. Expliciter, en particulier, P_1, P_2, et P_3.

5. En supposant acquis le fait que la famille $(x^k)_{k\geq 0}$ est complète dans $L^2(0,1)$, montrer que le seul élément de E orthogonal à tous les vecteurs de la famille $(P_n)_{n\geq 1}$ est la fonction nulle sur $[0,1]$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 4 : Ondelettes de Haar.
On considère la fonction ψ définie sur $\mathbf{R}$ de la façon suivante :

$$\psi(t) = \begin{cases} a \text{ si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ -a \text{ si } t \in]\frac{1}{2}, 1] \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer $a > 0$ pour que ψ définisse une famille d'ondelettes orthonormées de $L^2(\mathbb{R})$ (on demande de montrer le caractère orthonormé, pas le caractère total de la base).

2. Montrer que la décroissance de $\widehat{\psi}$ est en $1/\lambda$.

3. Pour quel type de signal une telle ondelette est-elle adaptée ? Inadaptée ?