Examen de

Mesure-Intégration, Analyse de Fourier, Distributions, Espaces de Hilbert, Ondelettes.

vendredi 20 septembre 2002 - durée : 3 heures

documents autorisés : notes de cours, TD, TP.

Remarque : dans tout l'énoncé, $\int_{[a,b]} f(x)dx$ désigne l'intégrale de Lebesgue $\int_{[a;b]} fd\lambda$ de f sur $[a,b]$ $(-\infty \leq a \leq b \leq +\infty)$ par rapport à la mesure de Lebesgue λ.

Exercice 1 : Intégrales de Lebesgue et série.

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x \in]0,1[$, on pose $f(t,x) = \frac{1}{x}\ln\left(1 + 2x\cos t + x^2\right)$.
   a. Etablir les inégalités
   $$2\frac{\ln(1-x)}{x} \leq f(t,x) \leq 2\frac{\ln(1+x)}{x}$$
   puis
   $$|f(t,x)| \leq -2\frac{\ln(1-x)}{x}$$
   (on vérifiera pour cela que $\max\left(-2\frac{\ln(1-x)}{x}, 2\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = -2\frac{\ln(1-x)}{x}$ pour $x \in]0,1[$)
   b. Montrer que l'application $x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{x}$ est intégrable sur $]0,1[$. En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application $x \mapsto f(t,x)$ est également intégrable sur $]0,1[$.
   On définit alors la fonction
   $$\forall t \in \mathbb{R},\ F(t) = \int_{[0,1]} f(t,x)dx$$
2. Montrer que l'application F est continue sur $\mathbb{R}$, paire, et $2\pi-$ périodique.
3. Montrer que F est dérivable sur $]0,\pi[$, et que :
   $$\forall t \in]0,\pi[,\ \ F'(t) = -2\sin t\int_{[0,1]} \frac{dx}{1 + 2x\cos t + x^2}$$
   Indication: Pour α fixé avec $\alpha < \pi$ et $t < \alpha < \pi$ on a $\cos t > \cos\alpha > -1$ et on vérifiera que $\frac{1}{1+2x\cos\alpha+x^2}$ est intégrable sur $[0,1]$.
4. Effectuer alors le calcul de l'intégrale pour trouver une expression simple de $F'(t)$ (on rappelle que $\arctan(\cot\text{an}(t)) = \pi/2 - t$ pour $t \in [0,\pi]$). En déduire que
   $$\forall t \in [0,\pi],\quad F(t) = F(0) - \frac{t^2}{2}$$
5. A partir de la définition de F, montrer que
   $$\forall t \in \mathbb{R},\ F(\frac{t}{2}) + F(\pi - \frac{t}{2}) = \frac{1}{2}F(\pi - t)$$
   En déduire les valeurs de $F(0)$ et de $F(\pi)$.

6. En utilisant le fait (admis) que $\int_{[0,1]} \frac{\ln(1-x)}{x} dx = -\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$, en déduire la valeur de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 2 : Distributions.
Soit la série de terme générale $f_n(t) = \frac{\sin(2\pi nt)}{n}$. On note φ un élément quelconque de l'espace $\mathcal{D}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, la fonction $f_n(t)$ définit une distribution régulière, que l'on notera T_{f_n}.
2. On note $[-a, a]$ un intervalle contenant le support de φ. Montrer que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \langle T_{f_n}, \varphi \rangle$$

est convergente (on utilisera une majoration par parties pour obtenir une majoration du terme général de la forme $\frac{K}{n^2}$). En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} T_{f_n}$ converge dans $\mathcal{D}'$. On notera T la distribution somme.

3. Définir la dérivée T' comme somme d'une série de foncions. Cette série peut-elle être convergente au sens des fonctions ?
4. Même questions avec la dérivée seconde T''.