Examen de

Mesure-Intégration, Analyse de Fourier, Distributions, Espaces de Hilbert, Ondelettes.

vendredi 19 décembre 2003 - durée : 3 heures

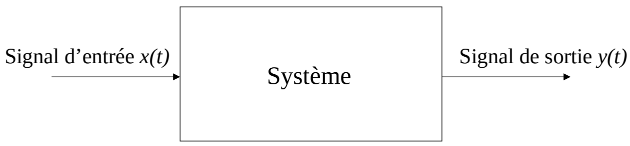
documents autorisés : notes de cours et de TD, polycopiés.

Questions préliminaires :

1. Soient $a \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(a) > 0$, et $u(t)$ la fonction échelon.Vérifier que pour $k \geq 0$, les fonctions $\frac{t^k}{k!} e^{-\varepsilon a t} u(\varepsilon t)$, pour $\varepsilon = +1$ et $\varepsilon = -1$, sont bien intégrables, et calculer par récurrence leur transformée de Fourier.

2. En déduire les transformées de Fourier inverse dans $L^2(\mathbb{R})$ des fonctions $\frac{1}{(a+2i\pi f)^{k+1}}$ et $\frac{1}{(-a+2i\pi f)^{k+1}}$ pour $k \geq 0$.

Exercice 1 : Filtres analogiques.
On considère un système (voir figure) qui à une fonction (un signal) d'entrée $x(t)$ appartenant à un espace de fonctions $\mathcal{X}$ fait correspondre une fonction (un signal) de sortie $y(t)$ appartenant à un espace de fonctions $\mathcal{Y}$.



On dit que ce système est un *filtre* si l'application $A : x \in \mathcal{X} \longmapsto y \in \mathcal{Y}$ est

- **linéaire**, c'est-à-dire $A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A(x_1) + \lambda_2 A(x_2)$;
- **invariant par translation**, c'est-à-dire que si à l'entrée $x(t)$ correspond la sortie $y(t)$, alors à l'entrée $x(t-a)$ correspond la sortie $y(t-a)$;
- **continue**, c'est-à-dire que si $(x_n)_n$ est une suite de fonctions de $\mathcal{X}$ converge vers la fonction nulle dans $\mathcal{X}$, alors la suite correspondante $(y_n)_n$ converge vers la fonction nulle dans $\mathcal{Y}$.

On s'intéresse ici à un système qui à l'entrée $x(t)$ fait correspondre la sortie $y(t)$ solution de l'équation différentielle

$$\sum_{k=0}^{p} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{l=0}^{q} b_l x^{(l)}(t) \tag{1}$$

avec $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$, et où $x^{(l)}(t)$ est la dérivée d'ordre l de $x(t)$ (idem pour $y^{(k)}(t)$).
On considère ici le cas où la fonction $x(t)$ appartient à l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, et on cherche $y(t)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$).

1. On note P et Q les polynômes

$$\begin{aligned} P(u) &= \sum_{k=0}^{p} a_k u^k \\ Q(u) &= \sum_{l=0}^{q} b_l u^l \ . \end{aligned}$$

   En supposant que P n'admet pas de racine imaginaire pure, montrer (en justifiant les calculs) que la transformée de Fourier $Y(f)$ de $y(t)$ s'écrit sous la forme

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

   où $X(f)$ est la transformée de Fourier de $x(t)$, et

$$H(f) = \frac{Q(2i\pi f)}{P(2i\pi f)}.$$

2. Montrer que Y appartient à l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, et en déduire que l'équation (1) admet une solution unique y dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

3. Montrer alors que l'application

$$\begin{aligned} A: \quad \mathcal{S}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ x &\longmapsto y \end{aligned}$$

   définit bien un filtre (on utilisera le fait que si $x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})}{\longrightarrow}} 0$, alors $Gx_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})}{\longrightarrow}} 0$ pour toute fonction G C^∞ telle que $Gx_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, et $X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{S}(\mathbb{R})}{\longrightarrow}} 0$). La fonction $H(f)$ est alors appelée *fonction de tranfert* du filtre.

4. On suppose maintenant que $q < p$. Montrer que $H \in L^2(\mathbb{R})$. En déduire (en expliquant) qu'on peut exprimer y comme un produit de convolution que l'on explicitera (on admettra que y appartient bien à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$).

5. L'expression de y trouvée à la question précédente est-elle valable si $p \leq q$? Pourquoi ?

6. On admet que si $q < p$, et si le polynôme P n'admet que des racines (complexes) $(z_k)_{k=1,\dots,p}$ simples, on a :

$$H(f) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\alpha_k}{2i\pi f - z_k}$$

   A l'aide des résultats de la question préliminaire, déterminer la réponse impulsionnelle $h = TF^{-1}(H)$ du système en fonction des $(\alpha_k)_k$ et des $(z_k)_k$ (on séparera les racines z_k en 2 parties $K^+ = \{k \in \{1,\dots,p\}$ tel que $\mathrm{Re}(z_k) > 0\}$ et $K^- = \{k \in \{1,\dots,p\}$ tel que $\mathrm{Re}(z_k) < 0\}$).

7. **Application** : circuit RLC.

   On cherche la tension $v(t)$ aux bornes d'une cellule RLC régie par l'équation différentielle

$$LCv''(t) + RCv'(t) + v(t) = x(t)$$

   avec $x \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On suppose que $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

   Déterminer la fonction de transfert de ce filtre à l'aide du résultat de la question 1. D'après l'expression de $|H(f)|$, dire de quel type de filtre il s'agit (passe-bas/passe-haut/passe-bande/coupe-bande).

8. A l'aide du résultat des questions 6 et 7, donner l'expression de la réponse impulsionnelle.

Exercice 2 : Filtres analogiques et distributions.
On considère encore le système qui à l'entrée x fait correspondre la sortie y solution de l'équation différentielle

$$\sum_{k=0}^{p} a_k y^{(k)} = \sum_{l=0}^{q} b_l x^{(l)} \tag{2}$$

avec $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$, mais on suppose cette fois-ci que x est une distribution tempérée ($x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$), et on cherche donc y dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
On montre là-encore que si P n'a pas de racine imaginaire pure, on peut écrire

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

et qu'ainsi le problème (2) admet une solution unique y dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (et on a aussi $Y \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$). De plus, si P n'a que des racines simples, on a

$$H(f) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\alpha_k}{2i\pi f - z_k} + \sum_{k=0}^{q-p} \lambda_k \left(2i\pi f\right)^k$$

en posant $\lambda_k = 0$ si $k < 0$ (**remarque** : à la différence de l'exercice précédent, on n'a pas besoin ici de faire la distinction $q < p$ ou $q \geq p$).

1. Déterminer la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de $\delta^{(k)}$.
2. En déduire la réponse impulsionnelle du système, en fonction des $(\alpha_k)_k$, $(\lambda_k)_k$, et des $(z_k)_k$ (on séparera toujours en 2 parties K^+ et K^-).
3. **Application** : on cherche à déterminer la sortie du système

$$y' + ay = x'' + x' + x$$

avec $a > 0$. Ecrire $H(f)$ sous la forme

$$H(f) = \lambda_0 + \lambda_1 2i\pi f + \frac{\alpha_1}{2i\pi f - z_1}$$

en exprimant λ_0, λ_1, α_1, et z_1 en fonction de a. Déterminer la réponse impulsionnelle h de ce système.