Examen de Analyse de Fourier I
vendredi 17 décembre 2004
documents autorisés : notes de cours et de TD, polycopiés.

1 Corrélations et spectres de signaux à énergie finie

On considère deux fonctions x et y à énergie finie, c'est-à-dire appartenant à l'ensemble $L^2(\mathbb{R})$. On appelle *fonction d'intercorrélation* entre x et y la fonction notée $K_{x,y}$ définie par

$$K_{x,y}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y^*(t)dt \tag{1}$$

1. Exprimer $K_{x,y}(\tau)$ comme un produit de convolution.
2. Montrer que $K_{x,y}(\tau)$ est définie pour tout τ, continue et bornée.
3. Comparer $K_{x,y}(\tau)$ et $K_{y,x}(\tau)$.
4. Pour $x = y$, la fonction $K_{x,y}(\tau)$ se note simplement $K_x(\tau)$: c'est la *fonction d'autocorrélation* de x. Ecrire $K_x(\tau)$ comme un produit de convolution. Montrer, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que
$$\begin{aligned} \forall\tau &\in \mathbb{R}, \quad |K_{xy}(\tau)|^2 \leq K_x(0)K_y(0) \\ \forall\tau &\in \mathbb{R}, \quad |K_x(\tau)| \leq K_x(0) \end{aligned}$$
5. On définit alors la *densité interspectrale d'énergie* entre x et y, notée $S_{xy}(f)$, et la *densité spectrale d'énergie*, notée $S_x(f)$, comme les transformées de Fourier respectives de K_{xy} et de K_x.

   En précisant en quel sens les transformées de Fourier sont utilisées (et en justifiant), montrer que
$$\begin{aligned} S_{xy}(f) &= X(f)Y^*(f) \\ S_x(f) &= |X(f)|^2 \end{aligned}$$
   où $X(f)$ et $Y(f)$ sont les transformées de Fourier de x et de y.
6. Déterminer la fonction d'autocorrélation $S_{x+y}(f)$ de la fonction $x+y$ en fonction de $S_x(f)$, $S_y(f)$, et $S_{xy}(f)$.
7. Soit $x(t) = 1_{[-T/2;T/2]}(t)$ avec $T > 0$ quelconque. Déterminer $S_x(f)$ de deux façons :
   - en appliquant directement la formule précédente ;
   - en calculant K_x et en déterminant sa transformée de Fourier (on pourra utiliser la formule $\sin^2\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{1-\cos u}{2}$).
8. On considère maintenant le problème de *modulation d'amplitude.* On souhaite émettre un signal x à énergie finie. On le module en amplitude, c'est-à-dire qu'on construit le signal
$$z(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$$
   où f_0 est une fréquence positive quelconque.

   Justifier que z est également à énergie finie.

   Déterminer la transformée de Fourier de z en fonction de celle de x, puis la densité spectrale d'énergie S_z en fonction de celle de S_x et de $X(f)$.
9. Dans le cas où $x(t) = 1_{[-T/2;T/2]}(t)$, représenter graphiquement $S_z(f)$ (approximativement). Quelle relation doit-il exister entre T et f_0 pour considérer que les fréquences positives et négatives n'interfèrent pas entre elles (c'est-à-dire que la courbe pour $f > 0$ ne chevauche quasiment pas celle pour $f < 0$, et vice-versa, de sorte qu'il n'y ait pas d'apparition de "pics parasites") ?

2 Corrélations et spectres de signaux périodiques

Question préliminaire : soit $p(t)$ une fonction localement intégrale, périodique de période T. On peut écrire

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} m(t - kT)$$

où $m(t)$ est le *motif* de $p(t)$, c'est-à-dire :

$$m(t) = \begin{cases} p(t) & , t \in [0;T] \\ 0 & , t \notin [0;T] \end{cases}$$

En écrivant $p(t)$ comme un produit de convolution, exprimer la transformée de Fourier de $p(t)$ en fonction de celle de $m(t)$ (on admettra que pour toute fonction g localement intégrable à support compact, et toute distribution tempérée $T \in S'(\mathbb{R})$, $g * T$ est une distribution tempérée, et la formule $\widehat{g * T} = \widehat{g}\widehat{T}$ est bien valable).

On s'intéresse maintenant à définir les notions de fonction d'inter/auto-corrélation et de densité spectrale pour des fonctions périodiques. On considère donc des fonctions x et y périodiques de période T, dans l'espace $L^2([0;T])$ (c'est-à-dire que $\int_0^T |x(t)|^2 \, dt$ est finie).

1. Pourquoi ne peut-on définir l'intercorrélation et l'autocorrélation de ces signaux à l'aide de la formule (1) ?

2. On définit alors pour ce type de fonctions les fonctions d'intercorrélation et d'autocorrélation par les formules suivantes

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y^*(t - \tau) dt \\ R_x(\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x^*(t - \tau) dt \end{aligned}$$

   Montrer que ces fonctions sont bien définies pour tout τ et qu'elles sont bornées (on utilisera l'inégalité de Cauchy-Schwarz), et qu'elles sont périodiques de période T.

3. Les fonctions périodique x et y peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^x e^{2j\pi kt/T} \\ y(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^y e^{2j\pi kt/T} \end{aligned}$$

   où $(c_k^x)_k$ et $(c_k^y)_k$ sont les coefficients de Fourier de $x(t)$ et de $y(t)$ (l'égalité ayant lieu dans $L^2([0;T])$). En supposant que $\sum_k |c_k^x|$ et $\sum_k |c_k^y|$ sont finis, montrer que

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^x c_k^{y^*} e^{2j\pi k\tau/T} \\ R_x(\tau) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k^x|^2 \, e^{2j\pi k\tau/T} \end{aligned}$$

   (on justifiera l'inversion $\int$ et $\sum$ en utilisant le théorème de Fubini).

4. Soit (T_n) une suite de distributions tempérées telle que $\sum_n T_n$ converge dans $S'(\mathbb{R})$ vers la distribution tempérée T (c'est-à-dire, $\forall \varphi \in S(\mathbb{R})$, $\langle T, \varphi\rangle = \left\langle \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} T_n, \varphi \right\rangle = \lim_{N\to+\infty} \left\langle \sum_{n=1}^{N} T_n, \varphi \right\rangle$). Montrer que

$$\widehat{T} = \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{T}_n$$

5. La *densité interspectrale de puissance* entre x et y, notée $S_{xy}(f)$, et la *densité spectrale de puissance*, notée $S_x(f)$, sont définies comme les transformées de Fourier respectives de R_{xy} et de R_x.

   En supposant que $\sum_k |c_k^x|$ et $\sum_k |c_k^y|$ sont finis, déterminer alors ces transformées en fonction des $(c_k^x)_k$ et $(c_k^y)_k$.

6. Soit la fonction

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) + B\sin(2\pi f_0 t)$$

   avec A et B réels. Calculer et représenter graphiquement $S_x(f)$.