Examen de Analyse de Fourier I
mardi 8 novembre 2005
documents autorisés : notes de cours et de TD, polycopiés.

1 Calcul de séries

On cherche dans cette exercice à calculer d'une certaine façon les séries

$$S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

1. Monter, en justifiant les calculs, que

$$\int_D \frac{d\lambda_2(x,y)}{(1+x^2y)\,(1+y)} = \frac{\pi^2}{2}$$

   où $D =]0;+\infty[\times]0;+\infty[$.

2. En exprimant le rapport $\frac{1}{(1+x^2y)(1+y)}$ sous la forme

$$\frac{1}{(1+x^2y)\,(1+y)} = \frac{\alpha(x)}{1+x^2y} + \frac{\beta(x)}{1+y} \tag{1}$$

   où α et β sont deux fonctions de x que l'on déterminera, déduire de la question précédente la valeur de l'intégrale

$$J = \int_{]0;+\infty[} \frac{\ln x}{x^2-1} dx$$

   (**remarque** : pour faire l'intégrale de l'expression (1) sur $]0;+\infty[$, on fera le calcul sans décomposer l'intégrale de la somme en somme de deux intégrales - car celles-ci sont infinies)

3. Par un changement de variable approprié, montrer que

$$J = 2\int_{]0;1[} \frac{\ln x}{x^2-1} dx$$

4. En écrivant que pour tout $x \in]0;1[$, $\frac{1}{x^2-1} = -\sum_{n=1}^{+\infty} x^{2n}$, calculer, en justifiant les calculs, les séries S_1 et S_2.

2 Valeur principale et signal analytique

On appelle valeur principale de $\frac{1}{t}$, notée $vp\left(\frac{1}{t}\right)$ la distribution tempérée définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \left\langle vp\left(\frac{1}{t}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt \right).$$

1. Montrer que

$$t.vp\left(\frac{1}{t}\right) = 1 \tag{2}$$

   (au sens des distributions).

2. On dit qu'une distribution T est impaire si pour toute fonction φ de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ (ou de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ s'il s'agit d'une distibution tempérée) :
$$\langle T, \varphi_\sigma \rangle = - \langle T, \varphi \rangle$$
où la fonction φ_σ est définie par $\varphi_\sigma(t) = \varphi(-t)$. Montrer que $vp\left(\frac{1}{t}\right)$ est une distribution impaire.

3. Montrer que la transformée de Fourier d'un distribution tempérée impaire est également impaire. Que peut-on alors dire de $\widehat{vp\left(\frac{1}{t}\right)}$?

4. A partir de la relation (2), montrer que
$$\left(\widehat{vp\left(\frac{1}{t}\right)}\right)' = -2j\pi\delta$$

5. On admet qu'une distribubtion de dérivée nulle est une distribution constante. En déduire alors que
$$\widehat{vp\left(\frac{1}{t}\right)} + 2j\pi U = \lambda \ ,$$
où U est la fonction de Heaviside, et λ est une constante.

6. Déterminer la constante λ de façon à ce que $\widehat{vp\left(\frac{1}{t}\right)}$ soit impaire. En déduire $\widehat{vp\left(\frac{1}{t}\right)}$, que l'on exprimera à l'aide de la fonction *signe* définie par
$$\begin{aligned} signe(t) &= +1 \quad \text{si } t > 0 \\ signe(t) &= -1 \quad \text{si } t < 0 \end{aligned}$$

7. Montrer que la dérivée de *signe* (au sens des distributions) est 2δ, et en déduire que
$$j\pi \ f \ \widehat{signe} = 1$$
et que
$$f\left(j\pi \ \widehat{signe} - vp\left(\frac{1}{f}\right)\right) = 0$$

8. On admet la propriété suivante : soit g la fonction $g(x) = x$. Si T est une distribution telle que $g.T = 0$, alors T s'écrit sous la forme $T = c\delta$, où c est une constante quelconque. Montrer grâce à cette propriété que
$$\widehat{signe} = \frac{1}{j\pi} vp\left(\frac{1}{f}\right)$$
(on déterminera la constante en remarquant que *signe* est impaire).

9. En déduire alors la transformée de Fourier de U.

10. **Applications** : on considère un signal réel $x(t)$ à énergie finie dont la transformée de Fourier est centré autour d'une fréquence f_c grande par rapport à la largeur de bande du signal (le support de la TF). Pour diverses raisons, on préfère parfois travailler avec des signaux dont la transformée est centrée sur la fréquence nulle. Pour cela, on définit le signal complexe $z(t)$, appelé *enveloppe complexe* de $x(t)$, par
$$z(t) = x_a(t)e^{-2j\pi f_c t} \text{ avec } x_a(t) = x(t) + jx_H(t)$$
Le signal $x(t)$ s'exprime alors en fonction de son enveloppe complexe $z(t)$ par
$$x(t) = \mathrm{Re}\left(z(t)e^{2j\pi f_c t}\right) \tag{3}$$
Dans (3), le signal $x_H(t)$ s'appelle la *transformée de Hilbert* de $x(t)$. Ce signal s'obtient en passant $x(t)$ à travers le filtre de réponse impulsionnelle $\frac{-1}{\pi} vp\left(\frac{1}{t}\right)$ et de fonction de transfert $H(f) = -j.signe(f)$. Le signal $x_a(t)$ s'appelle le signal analytique de $x(t)$.

- Montrer alors que la transformée de Fourier de $x_a(t)$ s'écrit :

$$X_a(f) = \begin{cases} 2X(f) & , \text{ si } f > 0 \\ 0 & , \text{ si } f < 0 \end{cases}$$

- On donne ci-dessous la transformée de Fourier de $x(t)$. Représenter alors graphiquement $X_H(f)$, $X_a(f)$, et $Z(f)$.