Examen d'Analyse de Fourier I
mercredi 15 novembre 2006
documents autorisés : 2 feuilles au format A4, recto-verso.

1 Questions

Répondre aux questions suivantes en justifiant correctement (mais brièvement) :

1. La fonction $\frac{1-\cos t}{t^2}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$?
2. Soit $g(t) = \sin t$, et f la fonction définie par :

$$\begin{array}{ll} f(t) = t & \text{pour } t \in \mathbb{Q} \\ f(t) = \frac{1}{\sqrt{|t|}} & \text{pour } |t| \leq 1 \text{ et } t \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ f(t) = \frac{1}{t^2} & \text{pour } |t| \geq 1 \text{ et } t \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{array}$$

   - le produit de convolution de f et g est-il défini (au moins presque partout) ?
   - la fonction $f * g$ est-elle continue ? bornée sur $\mathbb{R}$?

3. Les expressions suivantes ont-elles un sens (au sens des fonctions) ?
   - $TF\left(\frac{\sin(\pi at)}{\pi t} * \frac{\sin(\pi bt)}{\pi t}\right)$ (pour a et b non nuls) ;
   - $TF\left(\cos(2\pi f_0 t) * e^{-\alpha|t|^2}\right) = \widehat{\cos(2\pi f_0 t)}\ \ \widehat{e^{-\alpha|t|^2}}$

2 Transformée de Gabor

Soit w une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} |w(x)|^2\, dx = 1$. Cette fonction est appelée *fenêtre*. Soit f une fonction de $L^2(\mathbb{R})$. La *transformée de Gabor* de f relativement à la fenêtre w est la fonction W_f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$W_f(x,y) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{w}(t-y)e^{-2j\pi xt}dt$$

Cette transformée de Gabor est notamment utilisée en traitement du signal pour la localisation à la fois en temps et en fréquences d'un signal.

1. Soit F_y la fonction $t \mapsto f(t)\overline{w}(t-y)$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrer, en utilisant la formule de Cauchy-Schwarz, que $F_y \in L^1(\mathbb{R})$.
2. Montrer, en utilisant le fait que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par multiplication par un polynôme, que, $\forall y \in \mathbb{R}$, l'application $x \mapsto W_f(x,y)$ est de classe C^∞.
3. Montrer que $W_f(x,y) \to 0$ quand $|x| \to +\infty$.
4. En admettant que

$$\int_{\mathbb{R}} |W_f(x,y)|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \, |w(t-y)|^2\, dt$$

   montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |W_f(x,y)|^2\, dxdy = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\, dt$$

5. On suppose désormais de plus que f et $\widehat{f}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$. En exprimant f en fonction de $\widehat{f}$, et en utilisant la formule d'échange suivante

$$\forall g, h \text{ dans } L^1(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} TF^{-1}(g)(v)h(\nu)d\nu = \int_{\mathbb{R}} g(\nu)TF^{-1}(h)(v)d\nu$$

montrer que

$$W_f(x,y) = e^{-2j\pi xy} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(v)\widehat{\overline{w}}(x-v)e^{2j\pi vy}dv$$

6. En déduire, en utilisant le théorème de Fubini, la *formule de reconstruction* :

$$\int_{\mathbb{R}^2} W_f(z,y)w(x-y)e^{2j\pi xz}dzdy = f(x)$$

3 Distributions et électromagnétisme

On cherche à résoudre l'équation d'onde (en 3 dimensions) sur un potentiel vecteur $\overrightarrow{A}$ définie par

$$\left(\nabla^2 + \omega^2\right)\overrightarrow{A} = -\mu\overrightarrow{J}\delta_V$$

où $\overrightarrow{J}$ représente une source de courant ponctuelle. On montre que pour résoudre l'équation exprimée en coordonnées sphériques, on doit résoudre une équation du type

$$\nabla^2 X + \omega^2 X = S$$

Pour simplifier, on se ramène dans cet exercice à une équation en dimension 1 (même si le problème perd ainsi sa signification physique). On veut donc résoudre l'équation

$$X'' + \omega^2 X = S \tag{1}$$

On cherche tout d'abord LA solution *causale* dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation

$$E'' + \omega^2 E = \delta \tag{2}$$

1. montrer que la solution de cette équation (si elle existe) est bien unique. (indication : considérer une autre solution F, et montrer que $F = E$ en partant de $F = F * \delta$, et en utilisant le fait que $\delta^{(k)} * T = T^{(k)}$ pour toute distribution T).

2. pour avoir E causale, on cherche E sous la forme $E = Uy$, où U est la fonction de Heaviside. En utilisant les dérivées au sens des distributions, donner l'équation différentielle vérifiée par la fonction y, ainsi que les conditions aux limites (en 0).

3. Résoudre l'équation différentielle sur y.

4. En déduire l'expression de la solution de l'équation (1) sous forme d'un produit de convolution que l'on exprimera.