Examen d'Analyse de Fourier I
mercredi 14 novembre 2007
documents autorisés : 2 feuilles au format A4, recto-verso.

1 Questions

Répondre aux question suivantes en justifiant.

1. Soit μ_d la mesure discrète définie par $\mu_d(A) = card(A)$ pour tout ensemble A de $\mathbb{R}$. Soit $f(x) = \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x)$. Que vaut $\int_{[0,1]} f d\mu_d$?
2. La fonction
$$f(x) = \mathbb{I}_{]0,\pi]}(x) \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$
est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$ pour la mesure de Lebesgue ?
3. Quelle est la limite de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+n^2}$ quand $n \to +\infty$?
4. Soit $h_a(t) = e^{-a|t|}$ pour $a > 0$. A l'aide de la transformée de Fourier, déterminer $h_a * h_b(t)$ pour $a \neq b$ (on utilisera les formules : $\widehat{h}_a(f) = \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$, et $\frac{1}{(a^2+u^2)(b^2+u^2)} = \frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{1}{a^2+u^2} - \frac{1}{b^2+u^2}\right)$).

2 Transformée de Fourier et Equation différentielle

On considère l'équation des cordes vibrantes, donnée par :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t), \qquad t > 0 \tag{1}$$

avec les conditions initiales :

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f_1(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= f_2(x) \end{aligned}$$

où f_1 et f_2 sont deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ pour la mesure de Lebesgue. On suppose que u, f_1, et f_2 sont C^∞ et suffisamment régulières pour pouvoir dériver par rapport à t sous le signe $\int$ autant de fois que nécessaire.
On note $\widehat{u}(\xi,t)$ la transformée de Fourier en ξ de l'application $x \mapsto u(x,t)$, supposée intégrable pour tout t, c'est-à-dire :

$$\widehat{u}(\xi,t) = \int_{\mathbb{R}} u(x,t) e^{-2j\pi x\xi} dx$$

1. Montrer que $\widehat{u}(\xi,0) = \widehat{f_1}(\xi)$, que $\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\xi,0) = \widehat{f_2}(\xi)$. Montrer, en utilisant l'équation (1), que $\widehat{u}(\xi,t)$ vérifie l'équation différentielle par rapport à t :

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial t^2}(\xi,t) + 4\pi^2\xi^2c^2\widehat{u}(\xi,t) = 0 \tag{2}$$

2. La forme générale de la solution de (2) est :

$$\widehat{u}(\xi,t) = A(\xi)e^{2j\pi c\xi t} + B(\xi)e^{-2j\pi c\xi t}.$$

En utilisant les conditions aux limites, montrer que

$$\widehat{u}(\xi,t) = \frac{1}{2}\widehat{f_1}(\xi)\left(e^{2j\pi c\xi t} + e^{-2j\pi c\xi t}\right) + \frac{1}{2}\frac{\widehat{f_2}(\xi)}{2j\pi c\xi}\left(e^{2j\pi c\xi t} - e^{-2j\pi c\xi t}\right) \tag{3}$$

3. Pour $a \in \mathbb{R}$ quelconque, on définit la fonction

$$h(x) = \int_a^x f_2(v)dv.$$

Déterminer $h'(x)$ en fonction de $f_2(x)$, puis $\widehat{h}(\xi)$ en fonction de $\widehat{f_2}(\xi)$ (on utilisera la bonne formule du cours).

4. En utilisant la formule du retard sur l'équation (3), exprimer $u(x,t)$ en fonction de $f_1(x+ct)$, $f_1(x-ct)$, et de $\int_{x-ct}^{x+ct} f_2(v)dv$.

3 Distributions

On considère l'équation différentielle suivante au sens des distributions :

$$E'' + \omega^2 E = \delta \tag{4}$$

1. On cherche la solution de l'équation (4) dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. On montre que E s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} E &= (\cos\omega t)\, A + (\sin\omega t)\, B \\ E' &= -\omega\,(\sin\omega t)\, A + \omega\,(\cos\omega t)\, B \end{aligned} \tag{5}$$

où A et B sont deux distributions de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

2. Exprimer A et B en fonction de E et E'.

3. En dérivant ces deux expressions, montrer que

$$(\cos\omega t)\, A' + (\sin\omega t)\, B' = 0 \tag{6}$$

4. En dérivant l'équation (5), et en utilisant (4), montrer que

$$-\omega\,(\sin\omega t)\, A' + \omega\,(\cos\omega t)\, B' = \delta \tag{7}$$

5. A l'aide de (6) et de (7), déterminer A' et B'.

6. Sachant que les primitives de la distribution nulle sont des fonctions constantes, et que les primitives de δ s'écrivent sous la forme $U + cte$ (U est la fonction d'Heaviside), en déduire l'expression de E.

7. Vérifier alors sur l'expression obtenue qu'on a bien $E'' + \omega^2 E = \delta$.