Examen d'Analyse de Fourier
mercredi 26 novembre 2008
documents autorisés : 2 feuilles au format A4, recto-verso.

Remarque : dans tout l'énoncé, $\int_a^b f(x)dx$ désigne l'intégrale de Lebesgue $\int_{[a;b]} f d\lambda$ de f sur $[a,b]$ ($-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$) par rapport à la mesure de Lebesgue λ.

1 Transformée de Hankel

On appelle fonction de Bessel d'ordre 0 la fonction définie par :

$$J_0(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \exp\left(-it\cos(\theta-\alpha)\right) d\theta$$

1. En étudiant la périodicité de la fonction $\theta \mapsto \exp\left(-it\cos(\theta-\alpha)\right)$, et en effectuant un changement de variable, montrer que J_0 ne dépend pas de α.

2. Montrer que $\int_{-\pi}^{+\pi} \sin(t\cos\theta)d\theta = 2\int_0^{+\pi} \sin(t\cos\theta)d\theta$, puis que pour tout $u \in [0;\pi/2]$, on a : $\sin\left(t\cos(\pi/2-u)\right) = -\sin\left(t\cos(\pi/2+u)\right)$. En déduire que $J_0(t)$ est réel.

3. Montrer que J_0 est paire.

   On rappelle que dans $\mathbb{R}^2$, la transformée de Fourier d'une fonction f intégrable sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est définie par

   $$\widehat{f}(\xi_1,\xi_2) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1,x_2)e^{-2j\pi(x_1\xi_1+x_2\xi_2)}dx_1dx_2$$

   La formule de Parseval-Plancherel pour des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ se généralise aux fonctions de $L^2(\mathbb{R}^2)$, à savoir :

   $$\forall f,g \text{ dans } \mathbb{R}^2,\ \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1,x_2)\overline{g(x_1,x_2)}dx_1dx_2 = \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{f}(\xi_1,\xi_2)\overline{\widehat{g}(\xi_1,\xi_2)}d\xi_1d\xi_2$$

   De plus, on dit qu'une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est radiale si et seulement si il existe une fonction F de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, on ait : $f(x) = F(\|x\|)$, avec $\|x\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$.

4. Soit f une fonction radiale intégrable sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que la transformée de Fourier de f (dans $\mathbb{R}^2$), notée $\widehat{f}$, est telle que

   $$\forall (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\ \widehat{f}(\xi_1,\xi_2) = 2\pi\int_0^{+\infty} rJ_0(2\pi\|\xi\| r)F(r)dr$$

   aide : on effectuera pour cela le changement de variables $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$, puis on posera : $\xi_1 = \|\xi\|\cos\varphi$, $\xi_2 = \|\xi\|\sin\varphi$, et on utilisera la formule $\cos a\cos b + \sin a\sin b = \cos(a-b)$.

5. En déduire que $\widehat{f}$ est radiale.

   On peut alors définir la transformée de Hankel, notée TH, qui à une fonction F intégrable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ fait correspondre l'application notée $TH(F)$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par

   $$TH(F)(\rho) = 2\pi\int_0^{+\infty} rJ_0(2\pi\rho r)F(r)dr$$

   Chaque fois que nécessaire, on pourra considérer cette transformée de Hankel de F comme la transformée de Fourier dans $\mathbb{R}^2$ de la fonction radiale f définie par $f(x) = F(\|x\|)$, $x\in\mathbb{R}^2$.

6. Montrer, en utilisant la formule d'inversion de la transformée de Fourier dans $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire, pour $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $f(x_1, x_2) = \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{f}(\xi_1, \xi_2) e^{+2j\pi(x_1\xi_1 + x_2\xi_2)} d\xi_1 d\xi_2$ p.p. (avec égalité aux points où f est continue), que si F est continue et $TH(F) \in L^1(\mathbb{R}^2)$, alors
$$\forall r > 0, \;\; F(r) = 2\pi \int_0^{+\infty} \rho J_0(2\pi\rho r) TH(F)(\rho) d\rho$$
7. Soit $a > 0$. Pour une fonction g donnée définie sur $\mathbb{R}^+$, on note $dil_a(g)$ la fonction dilatée de g définie par : $\forall r > 0$, $dil_a(g)(r) = g(ar)$. Montrer que
$$TH\left(dil_a(F)\right) = \frac{1}{a^2} dil_{\frac{1}{a}}(TH(F))$$
8. Soient F et G deux applications de $L^2(\mathbb{R}^+)$. Montrer, en passant par les fonctions radiales associées f et g, et en utilisant la formule de Parseval-Plancherel dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, que
$$\int_0^{+\infty} rF(r)\overline{G(r)}dr = \int_0^{+\infty} \rho TH(F)(\rho)\overline{TH(G)(\rho)}d\rho$$
(on utilisera les changements de variables coordonnées pôlaires/coordonnées cartésiennes.)
9. Calculer la transformée de Hankel de la fonction définie de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ $F(r) = e^{-\pi r^2}$. **aide** : on rappelle $\widehat{e^{-\pi x^2}}(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$.

2 Distributions

2.1 Transformée de Fourier d'une distribution homogène

Soit φ une fonction quelconque de $S(\mathbb{R})$. Soit $\alpha > 0$. On note φ_α la fonction définie par : $\varphi_\alpha(x) = \varphi(\alpha x)$, $\forall x \in .\mathbb{R}$. On dit qu'une distribution T de $S'(\mathbb{R})$ est homogène de degré d si et seulement si :
$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \langle T, \varphi_\alpha \rangle = \alpha^{-(d+1)} \langle T, \varphi \rangle$$
1. Exprimer $\widehat{\varphi_\alpha}$ en fonction de $\widehat{\varphi}$.
2. Montrer alors, en calculant $\left\langle \widehat{T}, \varphi_\alpha \right\rangle$, que si T est homogène de degré d, alors $\widehat{T}$ est homogène, d'un degré que l'on précisera.

2.2 Convergence vers δ

On considère une suite de fonctions f_n définie sur $\mathbb{R}$, intégrables, positives, telles que
$$\int_{\mathbb{R}} f_n(t)dt = 1, \, \forall n \geq 1$$
et le support de f_n est inclus dans $\left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right]$. On veut montrer que la suite de fonctions f_n (plus précisément, la suite de distributions régulières T_{f_n}) tend vers la distributions de Dirac δ dans $D'(\mathbb{R})$.

1. Soit φ une fonction quelconque de $D(\mathbb{R})$. Rappeler la caractérisation de la continuité de φ en 0.
2. Rappeler la définition de la convergence d'une suite de distributions.
3. Montrer, en utilisant la continuité de φ en 0, que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N_ε tel que
$$\forall n \geq N_\varepsilon, \qquad \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\varphi(t)dt - \varphi(0) \right| dt \leq \varepsilon \int_{\left[-\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right]} f_n(t)dt$$
aide : on écrira $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\varphi(t)dt - \varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\left(\varphi(t) - \varphi(0)\right)dt$.
4. En déduire le résultat.